# Centro de Investigación y Desarrollo del Estado de Michoacán

## SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

*LA TANGENTE A UNA CURVA, PROPUESTA METODOLÓGICA PARA FORTALECER EL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS III EN EL COLEGIO DE BACHILLERES, USANDO SOFTWARE ESPECIALIZADO.*

**TESIS**

Que para obtener el grado de

**Maestro en Matemática Educativa**

Presenta:

**Manuel Salazar Martínez**

Asesor: **Dr. Federico González Santoyo**

Morelia, Michoacán Mayo de 2008

MAESTRÍA
Matemática Educativa

# Índice

## Resumen

La tangente a una curva, es uno de los temas centrales en el desarrollo de los cursos de cálculo en el bachillerato, pero presenta serias dificultades de comprensión en el aspecto gráfico por parte de los alumnos que cursan los últimos semestres; en el presente trabajo se aborda una propuesta para que desde el tercer semestre, con los conocimientos adquiridos en geometría analítica, sobre las rectas y cónicas se tenga una aproximación adecuada a este concepto, usando graficas para desarrollar más el aspecto de interpretación visual y como refuerzo a los conceptos algebraicos, que puedan aplicarse a problemas concretos y desarrollar mejora la idea de tangente a una curva con ayuda de software especializado en matemáticas.

Se desarrollan problemas de aplicación, en el primer caso, enfocado de la manera como lo hacemos en el aula, después de acuerdo a la propuesta, usando el software para realizar operaciones algebraicas y con la ayuda de la herramienta de graficación para visualizar las rectas y los puntos de tangencia sobre las gráficas.

Con la aplicación del software apoyado en la estrategia metodológica propuesta, el alumno puede tener una visión más completa en los conceptos que aprende, con la transferencia de este conocimiento a nuevos contextos, lo que puede contribuir a reducir los niveles de reprobación.

## Introducción

El presente trabajo, muestra la propuesta metodológica del uso del tema de la recta tangente a una curva como refuerzo para enseñar la asignatura de geometría analítica, usando software especializado, enfocado a los alumnos del plantel Tarímbaro del Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán.

Capítulo I (marco referencial)
Muestra los aspectos principales del plantel Tarímbaro del Colegio de Bachilleres, el historial de crecimiento de la población estudiantil, los recursos con los que actualmente cuenta, la tendencia de la capacitación para el trabajo que sigue la mayoría de los alumnos y los contenidos de matemáticas que se abordan en los diferentes semestres del bachillerato. Más adelante, se muestra un comparativo del programa anterior usado en el colegio en la asignatura de geometría analítica y el usado actualmente con la reforma promovida por la S. E. P.

Capítulo II (Marco teórico)
Se hace referencia a la problemática que enfrentan los docentes al tratar de implementar el uso de la tecnología en el aula.
Con el enfoque de teorías constructivistas, se aborda el tema de la relación entre el docente, el alumno y la tecnología.

Capítulo III (Propuesta metodológica)
Se muestran los conceptos relacionados al implementar la metodología en forma de síntesis, con la organización de los nuevos contenidos de la asignatura para una próxima revisión del programa en el Colegio.

Capítulo IV (Casos de aplicación)
Se aborda primero un contraejemplo de este tema, donde se muestra la solución del problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva, usando software y conceptos relacionados con el cálculo diferencial. Más adelante se expone la desventaja de esta aplicación con alumnos en este nivel de preparación.

En el desarrollo de este capítulo, se abordan casos con diferentes características en los problemas de aplicación, usando la propuesta, en cada caso al inicio se menciona los temas relacionados y la estrategia de solución usada, al final aparecen los comentarios de cada problema.

Por último se muestran los resultados que se pueden obtener al aplicar esta metodología y las conclusiones y recomendaciones respecto a su implementación, así como la bibliografía usada en la investigación de la tesis.

## Justificación

Los curso de geometría analítica a través de la visión del alumno aparecen desligados de los nuevos temas que se abordan en matemáticas IV (precálculo) y matemáticas V y VI, (calculo diferencial e integral); al parecer aprendemos algunas aplicaciones de la elipse y parábola pero no se presenta ningún enlace posterior; elegí este contexto de aprendizaje por que en la academia de matemáticas del plantel, se pretende implementar el uso de software especializado en matemáticas en temas específicos de la asignatura en sus diferentes semestres.

Al llegar a los últimos semestres, detectamos el problema de que los alumnos encuentran poca o ninguna relación con los temas de cursos anteriores, como ocurre con el concepto de función, que se aborda desde el primer y segundo semestre; en el tema de las cónicas, a su vez no le encuentran ningún enlace con los conceptos que se abordan en los cursos de cálculo. El alumno percibe los cursos de forma aislada sin ninguna relación entre ellos, aunado a esto, es común que no sea el mismo docente el que imparte los cursos subsecuentes.

Además, es posible implementar actividades dentro del aula que puedan apoyarse en el uso de la tecnología, como el *software Derive*, que está al alcance de nuestros alumnos y de nosotros como docentes.

En la práctica docente, podemos llegar a detectar cuales son los problemas más comunes a los que el estudiante se enfrenta en el aprendizaje de la materia de matemáticas III (geometría analítica) con un manejo preferencial del álgebra y un pobre desarrollo en el aspecto visual de las graficas y su interpretación.

Por parte de los docentes se expresa la preocupación de que los alumnos puedan usar de forma eficiente los conocimientos que adquieren y sirvan de base para aprender nuevos conocimientos conforme avanzan los cursos.

En el desarrollo de los temas de la forma anterior, no se llega a motivar al alumno a buscar un enlace entre asignaturas o generalización de los temas, que es imposible ver cuando se aborda el problema manipulando únicamente fórmulas con un uso preferencial al algebra. El caso es que los estudiantes parecen estar aprendiendo técnicas a costa de comprensión más amplia.

La tendencia actual en los cursos de geometría analítica se centra más en los procedimientos algebraicos y puede presentar el riesgo de que el alumno perciba sus conocimientos en matemáticas como una serie de algoritmos, sino que también hace que los estudiantes tengan muchas dificultades para generalizar y aplicar lo que han aprendido.

Los temas de geometría analítica, se enseñan en la mayoría de los casos, con una serie de apuntes, donde mostramos las fórmulas primero, que sin la respectiva deducción e interpretación gráfica, para el alumno no tienen más sentido que una serie de símbolos que sólo el maestro comprende y después damos una serie de ejemplos y dejamos tarea para que el alumno repita el proceso en casa.

Al impartir la asignatura de esta forma, estamos mostrando una serie de procedimientos y conceptos que el alumno debe memorizar si quiere aprobar la materia.

## Situación actual

En las reuniones de academia del área de matemáticas en el plantel Tarímbaro, surge la inquietud por una parte de los docentes de implementar el uso de software especializado en matemáticas para la enseñanza de los temas de geometría analítica; diseñando actividades que motiven su uso.

El docente del área de matemáticas interesado en la aplicación de esta tecnología se enfrenta a la problemática de que en los cursos que se imparten por parte del colegio, son del área de informática en general, o bien se abordan temas desligados con la situación académica y de infraestructura del plantel, por lo que en el corto y largo plazo no son aplicables.

La idea de esta propuesta es aplicar el software en temas específicos dentro del curso de geometría analítica y que pueden llegar a ser el enlace en los temas subsecuentes de los cursos de matemáticas IV (precálculo) y matemáticas V y VI (cálculo diferencial e integral).

Un aspecto importante a considerar, es la reprobación escolar del plantel Tarímbaro del Colegio de Bachilleres, que está mostrado en la figura 1.

Con base en el estudio Peña & Salazar, (2004), se muestran los índices de reprobación por campo de conocimiento:

## Campos de conocimiento y frecuencia de reprobación

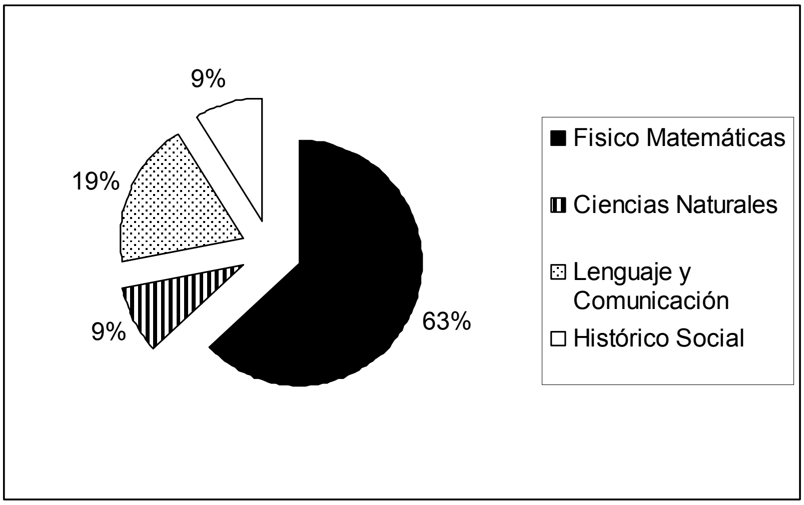



**Figura 1**

Fuente: **Estudio Peña & Salazar, 2004**

Como puede apreciarse en la figura 1, la reprobación en el campo físico matemático del plantel representa un 63 % del total de alumnos reprobados; esta cifra se mantiene y tiende a aumentar cada fin de semestre. En este mismo estudio, se menciona que los semestres con más reprobación en el plantel Tarímbaro, son el segundo y tercer semestre, con un 52% y 30% del total de alumnos reprobados en el área de matemáticas respectivamente.

## Implementación

La propuesta puede presentarse en los cursos de capacitación de profesores, que ofrece el Colegio de Bachilleres, en las academias por campo de conocimiento tanto para reforzarlos como para analizar su correcta aplicación y detectar fallas y oportunidades de mejora y contribuir a la disminución de los índices de reprobación; presentando una alternativa para mejorar algunos aspectos de la enseñanza como el uso del software para presentar las gráficas, haciendo énfasis en que no solo se trata de dejar al alumno con la computadora en una malentendido aspecto de actualidad, sino que el alumno desarrolle en clases con ayuda del maestro, los conceptos, elabore sus propuestas y conjeturas, y después las compruebe en la computadora, por su parte el profesor, debe diseñar con especial cuidado los ejercicios que puede mostrar en clase.

No debemos descuidar, ni dejar de lado el aspecto del manejo algebraico, sino darle otro sentido a lo que el alumno hace y no solamente ser bueno en algebra, pero presentar problemas al momento de interpretar o elaborar una gráfica.

Al presentar de manera relacionada lo que hace con el álgebra y su respectiva interpretación gráfica, no solo al nivel de modificar parámetros y ver el comportamiento de las curvas sino en problemas específicos, podemos abrir el camino para el desarrollo de un mejor aprendizaje de los temas relacionados con la recta tangente a una curva en los próximos semestres.

## Objetivos

Al mostrar esta propuesta se busca:

- Incrementar en el alumno el interés en el uso de software especializado en matemáticas, mostrando su aplicación en el aspecto gráfico con problemas específicos de geometría analítica.

- Incrementar el aprendizaje en su aspecto visual, como refuerzo del aspecto algebraico del análisis de las curvas que se ven en el curso de geometría analítica.

- Reforzar en el alumno la idea de enlace con temas vistos anteriormente dentro de la misma asignatura y los conceptos de matemáticas en los siguientes semestres.

## Hipótesis

Usando software especializado en matemáticas, en temas concretos de la asignatura de geometría analítica como la tangente a una curva, es posible mejorar el aprendizaje de los alumnos en su aspecto visual, como refuerzo del aspecto algebraico en el análisis de las curvas; de esta forma podemos contribuir a disminuir los índices de reprobación, reforzando los conceptos que sirven de enlace entre los temas de matemáticas que se abordan en los distintos semestres del bachillerato.

## Marco Referencial

El Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán fue creado por decreto del Ejecutivo del Estado el 13 de septiembre de 1983, con el objeto de impartir la educación media superior en el estado.
Sus primeros planteles se establecieron en las localidades de Huetamo, Jacona, Quiroga y Venustiano Carranza, que se agregó en diciembre de ese mismo año. Actualmente, a 24 años de su creación, el Colegio cuenta con 60 planteles y 21 extensiones que imparten estudios de forma escolarizada, 5 centros de telebachillerato y 8 unidades del sistema de enseñanza abierta, el Colegio tiene presencia en 90 poblaciones pertenecientes a 73 municipios de los 113 que comprenden el estado, lo que significa 64.6% de cobertura de la geografía michoacana.

### Plantel Tarímbaro

El plantel Tarímbaro, perteneciente al municipio del mismo nombre, fue creado el 3 de septiembre de 1993, en la modalidad escolarizada; está ubicado en el km. 8 de la carretera Morelia – Salamanca; (a 15 km. de la ciudad de Morelia) las principales actividades económicas de la región son la agricultura, ganadería, fruticultura y comercio. Las localidades afluentes con secundaria son: Uruétaro, Álvaro Obregón, Copándaro, Cuto del Porvenir y Téjaro.
Debido a la cercanía con la ciudad de Morelia, se tiene una variada población estudiantil, con alumnos que ingresan al plantel, provenientes de las comunidades mencionadas y alumnos de la periferia de la ciudad, lo que debe considerarse como alumnos con distintos estilos de aprendizaje, por la formación diferente, respecto al medio socioeconómico en el que se desarrollan.

## Historial de población Escolar del plantel Tarímbaro

| Ciclo escolar | Matricula por semestre | | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | 1° | 2° | 3° | |
| 2002 – 2003 | 365 | 264 | 171 | 800 |
| 2003 – 2004 | 407 | 255 | 230 | 892 |
| 2004 – 2005 | 427 | 267 | 203 | 897 |
| 2005 – 2006 | 455 | 264 | 218 | 937 |
| 2006 – 2007 | 498 | 303 | 174 | 975 |

**Tabla 1**

Fuente: **Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. Estadística básica 2006 – 2007**.

Como se aprecia en la tabla anterior, la tendencia de la población estudiantil en el último ciclo escolar, tiende a aumentar, debido al crecimiento de la ciudad de Morelia en esta zona, que debe ser tomado en cuenta al diseñar estrategias para atender a una mayor población estudiantil con los recursos que cuenta el plantel.

## Recursos

| | | |
|---|---|---|
| Equipo de cómputo | Computadoras | 31 |
| | Impresoras | 10 |
| Apoyo educativo | Edusat | Si |
| | Internet | Si |
| Infraestructura | Aulas | 12 |
| | Laboratorios | 2 |
| | Talleres | 1 |
| | Anexos | 21 |
| Bibliografía | Volúmenes | 1,714 |
| Personal | Directivos | 2 |
| | Docentes | 27 |
| | Administrativos | 16 |

**Tabla 2**

Fuente: **Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. Estadística básica 2006 – 2007**.

## Capacitación para el trabajo

Desde el tercer semestre, los alumnos, cursan asignaturas enfocadas a una capacitación específica en el área de informática o administración para integrarse al sector laboral.

| | Contabilidad | Informática | Total |
|---|---|---|---|
| Hombres | 14 | 53 | 67 |
| Mujeres | 27 | 80 | 107 |

**Tabla 3**
Fuente: **Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. Estadística básica 2006 – 2007**.

## Porcentaje de población estudiantil en las capacitaciones

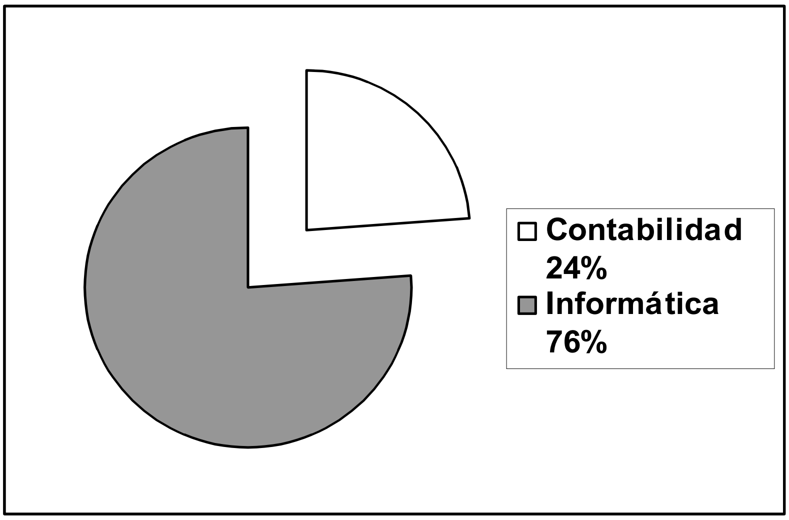



**Figura 2**
Fuente: **Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. Estadística básica 2006 – 2007.**

Como puede apreciarse en la figura anterior, un alto porcentaje de los alumnos optan por ingresar a la capacitación del área de informática, lo que representa una ventaja en cuanto al manejo de software.

## Antecedentes

Los temas generales que son tratados en la asignatura de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán, desde el primer hasta el sexto semestre son:

| Semestre | Asignatura | Contenido General |
|---|---|---|
| Primer | Matemáticas I | Álgebra |
| Segundo | Matemáticas II | Geometría Euclidiana<br>Trigonometría |
| Tercer | Matemáticas III | Geometría Analítica |
| Cuarto | Matemáticas IV | Precálculo Funciones algebraicas y trascendentes, análisis de su variación gráfica |
| Quinto | Matemáticas V | Cálculo Diferencial |
| Sexto | Matemáticas VI | Cálculo Integral |

**Tabla 4**

Fuente: **Programa de las asignaturas del Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. Dirección Académica**

El presente estudio se enfoca en el curso de matemáticas III con el contenido de geometría analítica; específicamente en el estudio de las cónicas y el tema de la recta tangente a una curva, como enlace a los cursos de matemáticas IV (precálculo).

A continuación se muestra como se ha modificado el curso de geometría analítica, dentro de la reforma de la Secretaría de Educación Pública, donde algunos temas se han reducido y otros se han eliminado; en las academias estatales de profesores de matemáticas, se pueden presentar propuestas de este tipo para fortalecer al programa del Colegio de Bachilleres mostrando problemáticas y soluciones especificas a los problemas con los que el profesor se enfrenta en el desarrollo de los cursos y no propuestas elaboradas por personas a veces ajenas a la labor docente del área de matemáticas.

| Contenido programa de estudios en liquidación (COBAEM) | Contenido programa de estudios de la reforma (DGB) |
|---|---|
| Unidad I **Conceptos preliminares de Geometría analítica** | Unidad I: **Sistema de ejes coordenados** |
| **1.1. Coordenadas rectangulares**<br>1.1.1. Ejes cartesianos<br>1.1.2. Coordenadas rectangulares<br>1.1.3. Localización de un punto en un plano<br>1.1.4. Distancia entre dos puntos<br>1.1.5. División de un segmento en una razón dada<br>**1.2. Pendiente e inclinación de la recta**<br>1.2.1. Pendiente de la recta<br>1.2.2. La inclinación de la recta | **1.1. Coordenadas cartesianas de un punto**<br>1.1.1. Ejes coordenados<br>• Parejas ordenadas<br>• Puntos en un plano<br>1.1.2. Lugares geométricos<br>• Concepto de lugar geométrico<br>• Soluciones y gráficas<br>• Investigación de gráficas<br>**1.2. Conceptos básicos sobre rectas, segmentos y polígonos**<br>1.2.1. Segmentos rectilíneos<br>• Segmentos dirigidos y no dirigidos<br>• Longitud de un segmento y distancia entre dos puntos<br>• División de un segmento en una razón dada<br>1.2.2. Rectas<br>• Angulo de inclinación y pendiente de una recta<br>• Condición de paralelismo y perpendicularidad<br>1.2.3. Polígonos<br>• Perímetros<br>• Áreas |

**Tabla 5**

Fuente: **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas III. COBEM y Dirección General del Bachillerato.**

| Contenido programa de estudios en liquidación (COBAEM) | Contenido programa de estudios de la reforma (DGB) |
|---|---|
| Unidad II: **La recta** | Unidad II: **La línea recta** |
| **2.1. Determinación de la ecuación de la línea recta**<br>2.1.1. Punto – punto<br>2.1.2. Punto – pendiente<br>2.1.3. Pendiente ordenada al origen<br>2.1.4. Simétrica<br>2.1.5. Normal<br>2.1.6. General | **2.1. Ecuaciones y propiedades de la recta**<br>2.1.1. Forma punto pendiente<br>• La recta como lugar geométrico<br>• Ecuación de una recta conocidos su pendiente y uno de sus puntos<br>• Ecuación de una recta conociendo dos de sus puntos<br>2.1.2. Forma pendiente ordenada al origen<br>• Intersección de una recta con el eje $y$<br>• Ecuación de una recta dada su pendiente e intersección con el eje $y$<br>2.1.3. Forma simétrica<br>• Intersección de una recta con los ejes coordenados<br>• Ecuación de una recta conocidas sus intersecciones con los ejes coordenados<br>2.1.4. Forma general de la ecuación de la recta<br>• Conversión de la ecuación de una recta a la forma general<br>• La línea recta y la ecuación general de primer grado<br>2.1.5. Forma normal de la ecuación de la recta<br>• Obtención de la forma normal a partir de la forma general<br>• Normal y distancia al origen<br>2.1.6. Distancia entre un punto y una recta<br>• Distancia dirigida y no dirigida de un punto a una recta<br>**2.2. Ecuaciones de rectas notables en un triángulo**<br>• Medianas<br>• Alturas<br>• Mediatrices<br>• Bisectrices |

**Tabla 6**

Fuente: **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas III. COBEM y Dirección General del Bachillerato.**

| Contenido programa de estudios en liquidación (COBAEM) | Contenido programa de estudios de la reforma (DGB) |
|---|---|
| Unidad III: **La circunferencia** | Unidad III: **La circunferencia** |
| **3.1. La circunferencia**<br>3.1.1. Definición<br>3.1.2. Elementos de la circunferencia<br>3.1.3. Gráfica en diferentes posiciones en el plano<br>**3.2. Determinación de las ecuaciones de la circunferencia**<br>3.2.1. Forma canónica<br>3.2.2. Forma general<br>3.2.3. Convertir las ecuaciones de una forma a otra | **3.1. Caracterización geométrica**<br>3.1.1. La circunferencia como lugar geométrico<br>3.1.2. Elementos asociados a una circunferencia<br>3.1.3. Formas de trazo a partir de la definición<br>**3.2. Ecuaciones ordinarias de la circunferencia**<br>3.2.1. Circunferencia con centro en el origen<br>• Obtención de la ecuación conocido el radio<br>• Obtención del centro y el radio a partir de la ecuación<br>3.2.2. Circunferencia con centro fuera del origen<br>• Obtención de la ecuación a partir del centro y el radio<br>• Obtención del centro y radio a partir de la ecuación<br>**3.3. Ecuación general de la circunferencia**<br>3.3.1 Conversión de forma ordinaria a forma general<br>3.3.2. Conversión de forma general a forma ordinaria<br>**3.4. Circunferencia que pasa por tres puntos**<br>3.4.1. Condiciones geométricas y analíticas para determinar una circunferencia<br>3.4.2. Obtención de la ecuación dados tres puntos<br>**3.5. Circunferencia y otras secciones cónicas**<br>3.5.1. Cortes en un cono para obtener circunferencias y elipses<br>3.5.2. Cortes en un cono para obtener una parábola<br>3.5.3. Cortes en un cono para obtener una hipérbola |

**Tabla 7**

Fuente: **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas III. COBEM y Dirección General del Bachillerato.**

| Contenido programa de estudios en liquidación (COBAEM) | Contenido programa de estudios de la reforma (DGB) |
|---|---|
| Unidad IV: **Parábola** | Unidad IV: **La parábola** |
| **4.1. La parábola**<br>4.1.1. Definición<br>4.1.2. Elementos de la parábola<br>4.1.3. Gráfica en diferentes posiciones en el plano<br>**4.2. Determinación de las ecuaciones de la parábola**<br>4.2.1 Forma canónica<br>4.2.2. Forma general | **4.1. Caracterización geométrica**<br>4.1.1. La parábola como lugar geométrico<br>4.1.2. Elementos asociados con una parábola<br>4.1.3. Formas de trazo a partir de la  definición<br>**4.2. Ecuaciones ordinarias de la parábola**<br>4.2.1. Parábolas horizontales y verticales con centro en el origen<br>• Obtención de los elementos a partir de la ecuación<br>• Obtención de la ecuación a partir de los elementos<br>4.2.2. Parábolas horizontales y verticales con centro fuera del origen<br>• Obtención de los elementos a partir de la ecuación<br>• Obtención de la ecuación a partir de los elementos<br>**4.3. Ecuación general de la parábola**<br>4.3.1. Conversión de la forma ordinaria a la general<br>4.3.2. Conversión de la forma general a la ordinaria |
| Unidad V: **Elipse** | **No se contempla** |
| Unidad VI: **Hipérbola** | **No se contempla** |

**Tabla 8**

Fuente: **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas III. COBEM y Dirección General del Bachillerato.**

## Marco teórico

La asignatura de matemáticas, en el plantel Tarímbaro, siempre ha presentado altos índices de reprobación por parte de la mayoría de los alumnos. Pero también existe la posibilidad de interesar al alumno en su aprendizaje, cambiando la forma de enseñar, ahora, con el uso de nuevas tecnologías, los alumnos tienden a ser más visuales; es común el uso de imágenes en Internet y la televisión, pero una gran parte de los docentes, nos hemos quedado atrás enseñando aún con gis y pizarrón y nuestros alumnos siguen aprendiendo matemáticas con lápiz y papel. Un apoyo para esta asignatura, es el uso de software especializado en el área de matemáticas. Pero existe aún resistencia por parte de algunos docentes al uso de software dentro del aula, por que lo consideran inadecuado para el alumno, bajo la consigna de que en lugar de ayudar, puede provocar que el alumno solamente se dedique a presionar botones y no aprenda los conceptos de la materia.

Uno de los argumentos que presentan los maestros que se oponen al uso de tecnología en los salones de clases es la idea de que si el alumno lo usa para resolver ejercicios, después no comprenderá los conceptos matemáticos y se volverá dependiente del software. Esta resistencia, es el reflejo de cómo aprendimos nosotros docentes cuando fuimos alumnos la asignatura de matemáticas, parte de lo anterior es cierto, pero más que prohibir su uso, se debe evitar *el mal uso* del software, diseñando actividades donde se pueda usar libremente y a partir de su uso construir los conceptos que tratamos de enseñar.

En la docencia al final de los cursos analizamos las estadísticas de aprovechamiento de los alumnos y observamos que semestre tras semestre nuestros alumnos reprueban en su mayoría la asignatura de matemáticas; si seguimos enseñando de una misma  forma y los resultados no cambian, es necesario preguntarnos ¿Estamos abordando de forma adecuada la enseñanza de la asignatura?

La tecnología dentro del aula debe ser un apoyo para que el docente pueda hacer un ambiente adecuado en el que el alumno comprenda mejor los conceptos que de otra manera, pueden ser difíciles de asimilar.

En el plantel Tarímbaro del Colegio de Bachilleres, contamos con 31 computadoras para una población estudiantil de más de 900 alumnos, que están asignadas para la asignatura de informática. Para implementar su uso, debemos diseñar actividades que relacionen las dos asignaturas.

Si queremos que las computadoras sean instrumentos funcionales, útiles y complementarias a otros medios que ya se utilizan en el contexto escolar, y aporten un elemento nuevo en el proceso de enseñanza-aprendizaje al interior de cada materia escolar, parece más apropiado que las computadoras se introduzcan y estén disponibles en cada una de las aulas en vez de crearse un aula de informática separada. (Villaseñor, 1998).

Una meta es que cada uno de los alumnos, aprenda a manejar el software de matemáticas que mostremos, pero la realidad es que no contamos con los recursos y que el objetivo es enseñar conceptos enfocados a matemáticas. Podemos enlazar el uso del software si en informática se enseña la materia aplicando un software de matemáticas.

Para mostrar a nuestro alumnos el software a todo el grupo, a manera de introducción, podemos *conectar una* computadora a una televisión mediante una tarjeta de video y mostrar así a todos los alumnos los temas, después, que ellos viertan las opiniones pero que sea el maestro el que la maneje, (como en el caso de mostrar las tendencias de gráficas), puede hacer presentaciones en *power point* y mostrarlas en clase, en otra etapa más avanzada que los alumnos sean los que manejen la computadora, otra opción es usar un proyector de video para computadora.

Son opciones que se pueden llevar a cabo utilizando lo que ya tenemos de tecnología en el plantel. Otro aspecto importante es capacitar y motivar a todos los maestros para que se lleve a cabo en los distintos semestres en que se imparte la asignatura.

## Teorías del Aprendizaje

Con el contexto mostrado anteriormente, las teorías de aprendizaje que más se relacionan con el aprendizaje en la asignatura de matemáticas usando tecnología, están enfocadas al maestro, al alumno y a crear un ambiente adecuado de aprendizaje.

## El maestro:

La mayoría de profesores de matemáticas rechazan el uso de calculadoras graficadoras y computadoras porque tienen la creencia que su uso inhibirá las habilidades operatorias de los estudiantes.

Debido a la marcada resistencia a implementar el uso de la tecnología aunque sea mínima refleja como nosotros fuimos formados en un ambiente donde no se usaba, vemos como una amenaza que la implementemos por que tendemos a seguir los mismos patrones de aprendizaje de nuestros maestros cuando nosotros fuimos alumnos, ya que nos formamos en un ambiente conductista, donde el maestro era el que poseía el conocimiento y nosotros como alumnos debíamos estar al tanto de lo que él pudiera enseñarnos. Como menciona Pozo I. en su libro Aprendices y maestros "No solo cambia culturalmente lo que se aprende sino también la forma en que se aprende".

Debemos conocer esas nuevas demandas para atenderlas, ya que la sociedad actual así lo exige, pero también debemos verlas de forma crítica y adaptarlas a nuestras necesidades reales. Pero si no tenemos conciencia del propio aprendizaje, difícilmente vamos a cambiar nuestra concepción del mismo.

Toda enseñanza se basa en una concepción del aprendizaje, las más de las veces implícita, adquirida de modo incidental, cuando el que ahora es maestro, se vio inmerso como aprendiz, en una determinada cultura del aprendizaje (Pozo, 2000).

Todo cambio en las formas de enseñar, como el que exige las nuevas fronteras del aprendizaje, requiere una toma de conciencia y un cambio de esas teorías implícitas sobre el aprendizaje por parte de los maestros (Claxton 1990. Citado en Aprendices y maestros, Pozo, 2000).

El perfil de los alumnos egresados del nivel medio superior y que ingresan a la universidad, es cada vez más exigente por la gran cantidad de aprendizajes distintos, pero nosotros nos hemos limitado a un aprendizaje asociativo, por su carácter repetitivo, con lo que no logramos una generalización en los problemas o si llega a darse es muy limitada. Cuantas veces no escuchamos decir a los maestros "Solo cambié un signo y los alumnos ya no pudieron resolver el problema".

En otros términos, puede decirse que si los aprendices se entrenan solo en completar ejercicios (tareas rutinarias para las que se ha aprendido ya una solución específica) difícilmente aprenderán a resolver problemas (tareas más abiertas para las que hay que buscar vías de solución). Completar ejercicios por procesos repetitivos es una condición necesaria, pero no suficiente para lograr resolver problemas que requieren además un proceso de reestructuración. (Pérez Echeverría y pozo, 1994, citado en Aprendices y maestros, Pozo, 2000)

Los maestros, debemos lograr, además de que nuestros alumnos aprendan los procesos de solución de ejercicios, mediante el diseño de actividades donde el alumno le encuentre significado a lo aprendido.

Una de las grandes dificultades con las que se enfrenta cualquier proyecto de introducción de computadoras en la escuela es la sensibilización y formación de los profesores en el campo de informática. Si queremos de la informática sea un nuevo medio didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje de cada materia escolar y que sea también punto de partida de proyectos transdisciplinares, tenemos que garantizar una buena formación del profesor en el ámbito de las nuevas tecnologías (Villaseñor, 1998).

Ya que el docente se convenció de las ventajas del uso de los medios en el salón de clase y como se menciona anteriormente el currículo del colegio lo sugiere y recomienda.

No debe pensarse que con el solo hecho de llevar a los alumnos al centro de cómputo o de introducir algunas computadoras en el aula, las clases van a mejorar.

## Alumnos y Aula

## La construcción del conocimiento

Para el constructivismo, el conocimiento es siempre una interacción entre la nueva información que se nos presenta a lo que ya sabíamos, aprender entonces es construir modelos para interpretar la información que recibimos. Se entiende que hay construcción del conocimiento cuando lo que se aprende se debe no solo a la nueva información presentada, sino también a los conocimientos previos de los alumnos.

En el caso específico de las matemáticas, un mismo problema se puede entender de diferentes maneras por diferentes alumnos pero no está muy claro el proceso de cambio de esos conocimientos previos, de acuerdo a Ignacio Pozo en su libro aprendices y maestros "…No es la existencia de conocimientos previos influyendo en el aprendizaje lo que define a un modelo constructivista. Es la construcción dinámica del conocimiento, los procesos mediante los que el conocimiento cambia".

Al usar la tecnología como recurso para el aprendizaje de las matemáticas, no presentemos la asignatura como un producto acabado, más bien hagamos que el alumno construya su propio conocimiento diseñando ambientes de aprendizaje adecuados además de actividades donde el alumno pueda aplicar y ampliar los conocimientos que adquiere.

## Estructura lógica y organizadores avanzados

La estructura lógica del material es una de las características del aprendizaje significativo, teoría de aprendizaje propuesta por el psicólogo educativo David P. Ausubel. El aprendizaje significativo se opone al aprendizaje como memorización pura de contenidos. Para que el aprendizaje significativo tenga lugar es necesario que el estudiante pueda relacionar lo aprendido con sus conocimientos previos o con experiencias previas.

Entonces, ¿cuáles son las condiciones para que se dé el aprendizaje significativo por recepción? (Pozo 1994. Citado en Selección y uso de tecnología educativa, Escamilla de los Santos, 2002). Propone las siguientes:

- Que se usen materiales lógicamente estructurados.
- Que el estudiante tenga una predisposición al aprendizaje.
- Que la estructura cognitiva del estudiante cuente con ideas inclusoras; es decir, que el conocimiento previo del estudiante pueda ser relacionado con el nuevo material.

El uso de materiales lógicamente estructurados implica que el papel del maestro es presentar la información de manera procesada. Esta presentación puede ser por medio de una exposición en el aula o a través de un medio escrito. Sin embargo, cabe aclarar que cuando se habla de enseñanza por exposición no se refiere aquí a la cátedra o conferencia magistral en la que el estudiante tiene una actitud pasiva. (Escamilla de los Santos, J. G. 2002).

## Organizadores Avanzados

1. Típicamente son un pequeño conjunto de información verbal o visual.
2. Se presenta al estudiante antes de iniciar el aprendizaje de un conjunto de conocimientos.
3. Son de alto nivel de abstracción, en el sentido que no contienen nueva información a aprender.
4. Proveen de medios para que el estudiante genere relaciones lógicas con el material nuevo.
5. Influyen en el proceso de codificación del estudiante.

Es cierto que el medio informático posee una serie de potencialidades que pueden significar cambios beneficiosos en el proceso enseñanza-aprendizaje, pero también es cierto que muchas de las aplicaciones educativas de la informática han tenido resultados perniciosos, desanimando a más de un profesor y a más de un alumno que se han confrontado a máquinas de difícil acceso que no funcionaban la mitad de las veces, a programas repetidos y aburridos, a contenidos de aprendizaje sin relación alguna con las materias o a situaciones de aprendizaje solitarias y poco motivantes. (Villaseñor, 1998).

Hacen falta elementos de referencia para que el docente integre en el aula software para llevar acabo una clase en verdad centrada en el aprendizaje.

Es importante señalar que los criterios que se siguen manejando para la elaboración de medios se apoyan más en principios experienciales que en técnico-didácticos. En pocas ocasiones se ha propiciado e impulsado una reflexión teórica sobre cómo, cuándo y por qué la tecnología debe ser utilizada. (Villaseñor, 1998).

El docente, debe considerar su uso como parte del currículum pero teniendo en consideración un diseño adecuado que le de una variabilidad a las clase, ya que esto puede provocar una limitada función de estos (los medios) y poder superar su mera utilización instrumental.

La concepción del medio como un elemento curricular más, permite la reflexión sobre las posibilidades que pueda tener en el proceso de enseñanza-aprendizaje, éstas no dependerán del medio en sí, sino de las relaciones que establezca con otros elementos curriculares: contenidos, métodos, estrategias docentes, contexto de aprendizaje, criterios e instrumentos de evaluación. (Villaseñor, 1998).

En la forma actual de enseñar se asocia a las matemáticas con la certeza, es decir nos hemos enfocado a la respuesta correcta del alumno; que en una gran mayoría, tiene la idea de que aprender matemáticas para presentar un examen por ejemplo, su aprendizaje se limita a recordar y aplicar la regla o método adecuado para contestar los problemas y nosotros como docentes nos limitamos a evaluar la respuesta correcta o incorrecta del alumno.

Por otra parte, mostramos la asignatura como un conjunto de conocimientos fijos y acabados.

Romberg (1992 citado en Aprendices y maestros, Pozo 2000), afirma que un punto de vista dinámico de las matemáticas se refleja en su aprendizaje "La enseñanza de las matemáticas incluye el aceptar que los estudiantes pueden crear o desarrollar sus propios conocimientos matemáticos".

De acuerdo con Romberg (1992 citado en Aprendices y maestros, Pozo 2000), un punto de vista dinámico de las matemáticas conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda:

- Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
- Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas.
- Hacia el desarrollo del razonamiento matemático, no deben ver a las matemáticas como un conjunto de reglas o fórmulas  para memorizar.
- Hacia la resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.

El conocimiento de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de cálculo. (Dubinsky y Harel, 1992. Citado en, Desarrollo del pensamiento matemático Cantoral, R 2003).

Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales, entre otras cosas por no considerarlos como matemáticos, o bien, por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se tenga, sin considerar, por ejemplo: la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. (Cantoral, R. 2003).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, la idea de las matemáticas de los alumnos de nuestro plantel, se reduce a aprender una serie de procedimientos (en el mejor de los casos) que sirve únicamente para resolver los problemas que el maestro le presente. Que además por ser precisamente el maestro el que presenta los ejercicios o series de problemas, se descontextualiza del ambiente real del alumno, es decir no son sus problemas, que surjan de un ambiente de aprendizaje como el aula, sino que son problemas del maestro que el solamente se limita resolver mediante una serie de pasos aprendidos o memorizados antes del examen.

El reto del maestro, consiste en generar ese ambiente de discusión dentro del aula, diseñar los cursos, considerando los distintos estilos de aprendizaje de los alumnos y apoyándose en el uso de tecnología para el diseño y desarrollo de sus actividades.

El siguiente esquema representa un salón de clases como una comunidad matemática donde maestro y alumno puedan intercambiar ideas complementando con el uso de la tecnología.

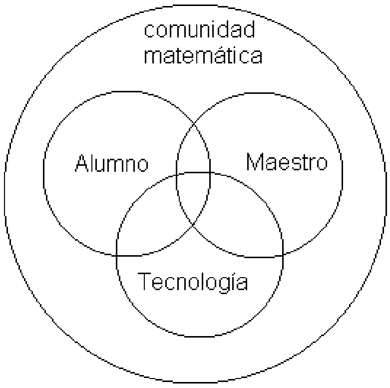



**Figura 3**
Fuente: **Elaboración propia**

Una idea muy popular, pero muy cuestionada recientemente, acerca de las matemáticas es que se pueden desarrollar en forma individual usando una hoja de papel y lápiz. Uno de los retos para el maestro, es que debe generar un ambiente de trabajo colaborativo, el salón de clases debe ser una comunidad donde el alumno discuta y defienda sus ideas matemáticas.

Cuando los estudiantes encuentran un ambiente de aprendizaje en el salón de clases que les permita pensar y razonar acerca de las matemáticas y comunicar sus resultados a otros en base a argumentos, es decir, que puedan presentar y organizar sus ideas en forma convincente, de acuerdo con Luz Manuel Santos Trigo (1997) "Los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas. Además, las ideas matemáticas se aprenden por medio de un proceso de comunicación. Los estudiantes necesitan oportunidades no solo para escuchar sino para comunicar sus ideas matemáticas".

Estamos frente a un proceso de matematización de otras disciplinas, es decir, se debe ver a la matemática como la necesidad, por las condiciones económicas, políticas y sociales actuales, que los jóvenes sepan interpretar gráficas de funciones.

## Propuesta metodológica

Como hemos visto, para lograr un buen aprendizaje, es necesario que se reestructuren los conocimientos anteriores, encontrando una aplicación de los mismos, de ahí la importancia de que el profesor muestre la información de una forma organizada, en la propuesta, el profesor elabora el material denominado organizadores avanzados con las siguientes características principales:

- Son un pequeño conjunto de información verbal o visual.
- Se presenta al estudiante antes de iniciar el aprendizaje de un conjunto de conocimientos.
- Son de alto nivel de abstracción, en el sentido que no contienen nueva información a aprender.

Este material se comenta con los alumnos antes de abordar los problemas para reforzar los conocimientos adquiridos.

Como únicamente conocemos las coordenadas del punto de tangencia y de acuerdo a lo visto por los alumnos se necesitan dos puntos para encontrar la ecuación de la recta, procedemos de la siguiente manera:

Consideramos que ya conocemos las coordenadas de un punto (el punto de tangencia) $A(x, y)$, por lo que generamos una tabla de valores, usando el software; cada vez más cercanos al punto A, con lo que se van generando secantes que se acercan cada vez más al punto de tangencia y al valor de la pendiente, como se aprecia en la figura 4:

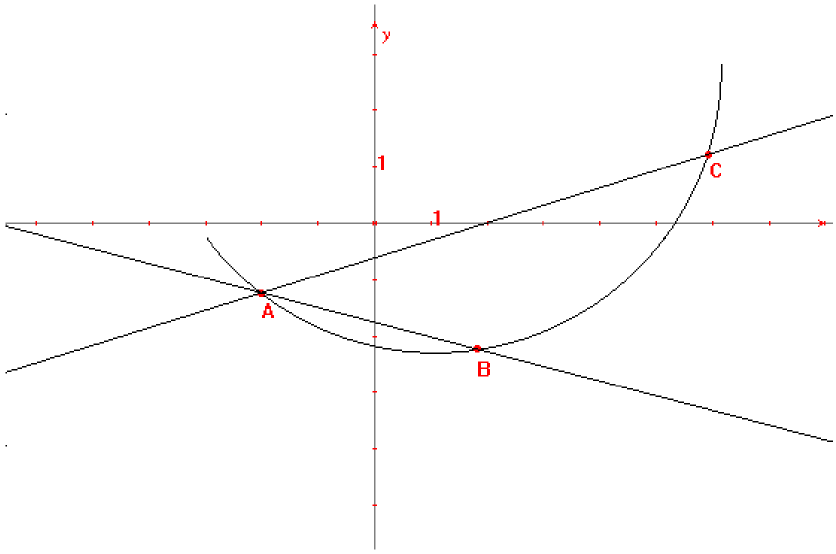



**Figura 4**
Fuente: **Elaboración propia**

Sintetizando, la metodología propuesta contiene:

- Uso del material Organizadores Avanzados
- Uso del software derive
    - Ventana de trabajo
    - Principales botones de la barra de herramientas
    - Manejo de variables
    - Elaboración de tablas
    - Sistemas de ecuaciones
    - Elaboración de gráficas
- Aproximación de una recta (secante) a un punto determinado (punto de tangencia)

De acuerdo a la propuesta el tema de la recta tangente quedaría ubicado al final del curso que es el momento en el que el alumno puede contar con los conocimientos adecuados.

| Unidad V: **La tangente a una cónica** |
|---|
| 4.1. **Caracterización geométrica**<br>4.1.1. Recta secante a una cónica<br>4.1.2. Recta tangente a una cónica<br>4.2. **Condiciones de tangencia**<br>4.2.1. Tangentes con pendiente cero y su relación con los puntos de valor máximo y mínimo dentro de una curva<br>4.3. **Problemas de aplicación** |

**Tabla 9**
Fuente: **Elaboración propia**

El proceso de implementación se puede llevar a cabo en el semestre 2008/2 que inicia en agosto y la modificación al programa presentarla en la academia estatal en el mes de septiembre de 2008.

## Software DERIVE

En los últimos años han aparecido varios programas de cálculo simbólico. La determinación de cuál de ellos elegir, debe hacerse en función de varios aspectos: campo y nivel de las aplicaciones por resolver, necesidades de hardware, dificultad de aprendizaje.

Hemos de indicar que el verdadero trabajo con este programa no acaba conociendo el funcionamiento de las diferentes órdenes; éstas son la base para que por parte del usuario puedan diseñarse diferentes funciones o aplicaciones (Carrillo, 1994).

En el trabajo de las academias de matemáticas del plantel y de la coordinación se ha implementado el uso del Derive, no por que se tenga preferencia en su uso sino por que en este momento es el que mejor se adapta a las necesidades de los alumnos en los planteles quedando abierta la posibilidad de mejorarlo con el uso de otro software, con un análisis comparativo de las ventajas y desventajas de implementar uno nuevo.

A continuación, se muestran las ventanas de trabajo del software con los comandos usados, así como los íconos y su aplicación.

## Ventana de trabajo

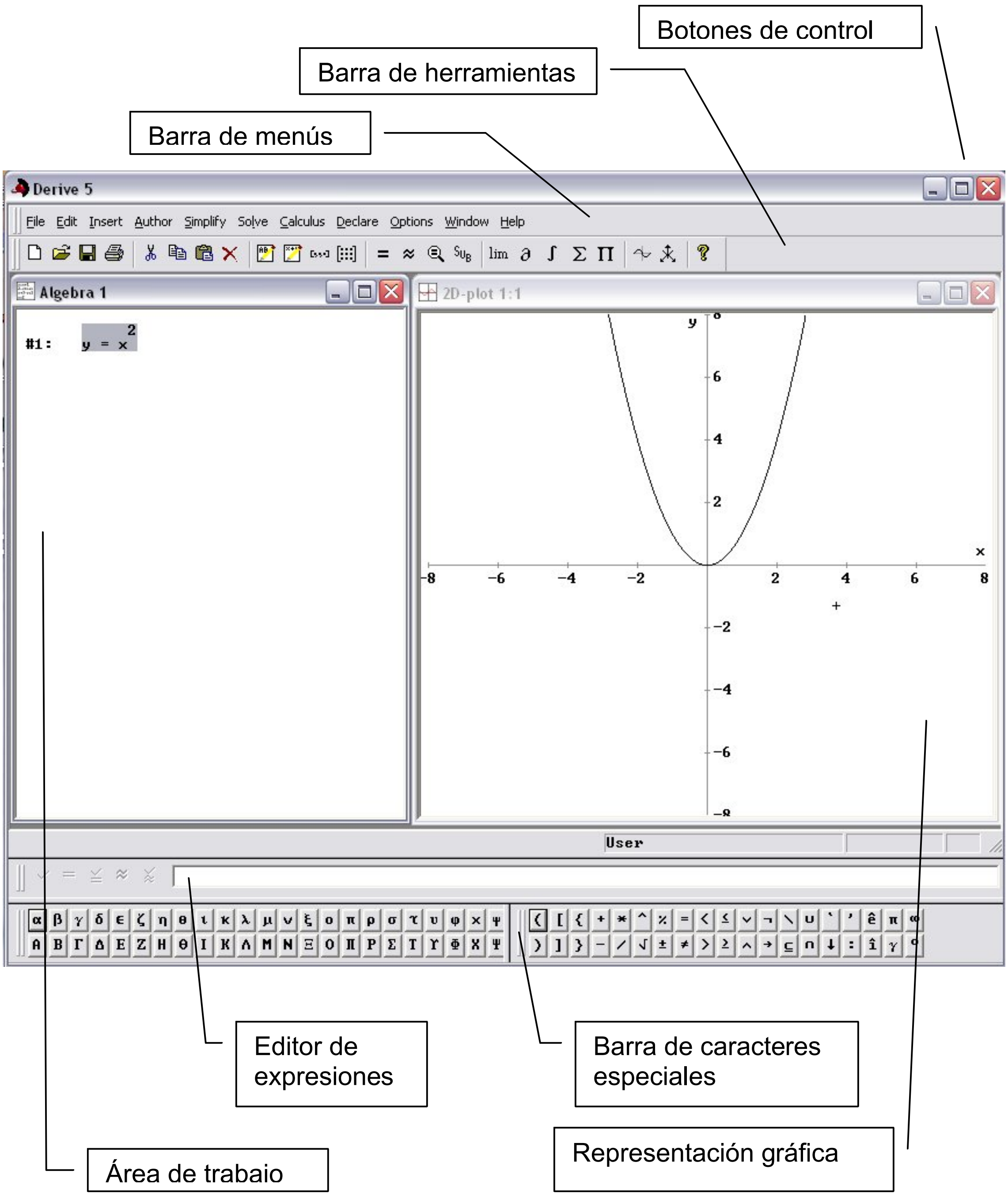



**Figura 5**
Fuente: **Elaboración propia**

## Principales botones de la barra de herramientas

### Comando Author

En la barra de menús o directamente, en la barra de herramientas, activamos el comando Author, que podemos entender como la opción principal que nos permitirá introducir constantes, expresiones, funciones o ecuaciones en la ventana de trabajo para realizar las tareas y procesos deseados.

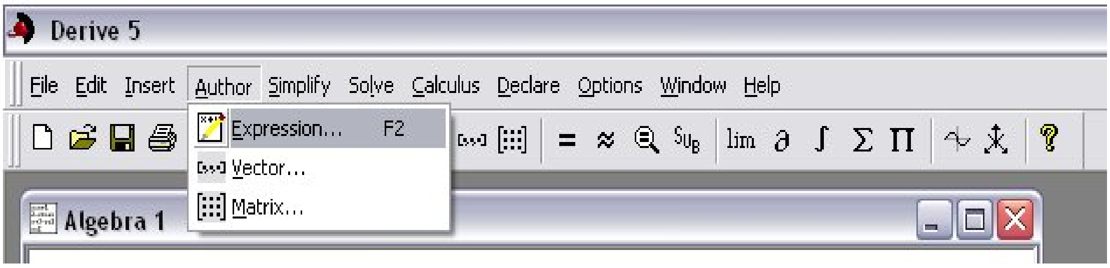



**Figura 6**
Fuente: **Elaboración propia**

## Declaración de variables

Una variable en DERIVE es una expresión cuyo valor es desconocido.
Cuando se asigna un valor a una variable, al simplificar una expresión que contenga dicha variable, esta variable será sustituida por el valor asignado. Por ejemplo, si deseamos conocer el valor de la pendiente, directamente en la expresión que obtenemos al derivar una función.
Derive utiliza el siguiente formato, para definir una expresión que contiene una o varias variables (: =), dos puntos seguidos por un signo de igualdad, distinto de la expresión. Por ejemplo, la elipse definida por: $x^2 - xy + y^2 = 9$

La expresión pasará al área de trabajo y automáticamente se le asignará un número en orden consecutivo. Si durante algún proceso necesitamos hacer referencia a esta expresión, bastará con escribir el número precedido por el signo #.

En el área de trabajo, aparece:

Definimos la expresión con (:=)

#1: $f(x, y) := x^2 - x \cdot y + y^2 = 9$

Evaluamos la expresión # 1 con y=0 para conocer los puntos donde la elipse intersecta al eje x

Usamos el comando SOLVE para evaluar la función en ese punto.

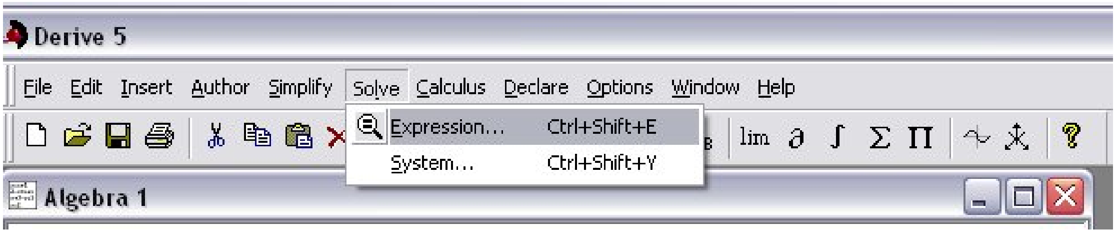



**Figura 7**
Fuente: **Elaboración propia**

Aparece en el área de trabajo:

#1: $f(x, y) := x^2 - x \cdot y + y^2 = 9$

#2: $f(x, 0)$

#3: SOLVE(f(x, 0), x)

#4: $x = -3 \vee x = 3$

De los valores anteriores, se definen los puntos

#5: [-3, 0]

#6: [3, 0]

## Comando TABLE (crear una tabla)

Para crear una tabla, podemos hacerlo de dos maneras que pueden ser útiles de acuerdo a los resultados esperados y al nivel de profundidad que se desee manejar con los alumnos:

- Definiendo punto por punto a evaluar y
- Definiendo un rango de valores

El formato general con el que trabaja Derive es:

*TABLE (expresión, variable, [valores])*

Para ejemplificar lo anterior, definiendo los puntos directamente; elaboremos una tabla con los valores de 1 hasta 6 de la función $y = x^2$

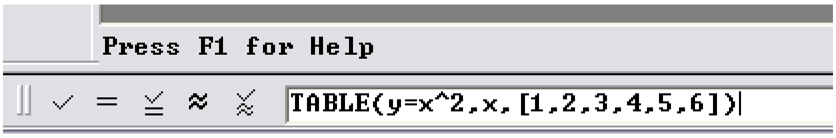



**Figura 8**
Fuente: **Elaboración propia**

En la ventana de trabajo, al presionar el botón *solve*, podemos apreciar la tabla con los valores.

#1: $\text{TABLE}(y = x^2, x, [1, 2, 3, 4, 5, 6])$

#2: $$\begin{bmatrix} 1 & y = 1 \\ 2 & y = 4 \\ 3 & y = 9 \\ 4 & y = 16 \\ 5 & y = 25 \\ 6 & y = 36 \end{bmatrix}$$

Podemos elaborar la tabla directamente, haciendo clic en el comando TABLE:

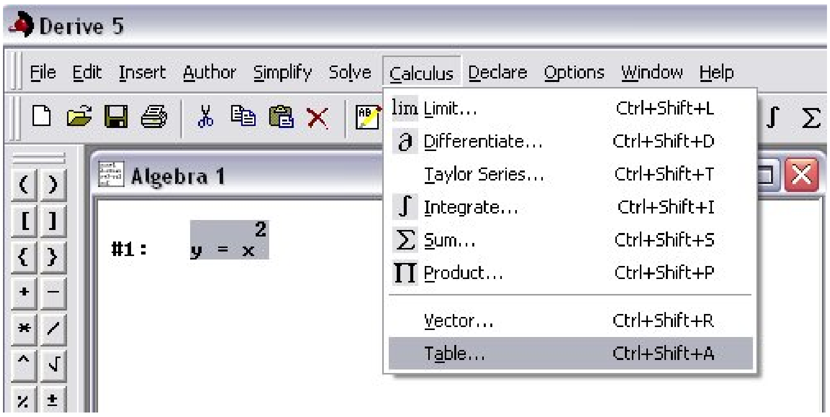



**Figura 9**
Fuente: **Elaboración propia**

Aparece el siguiente cuadro de diálogo:

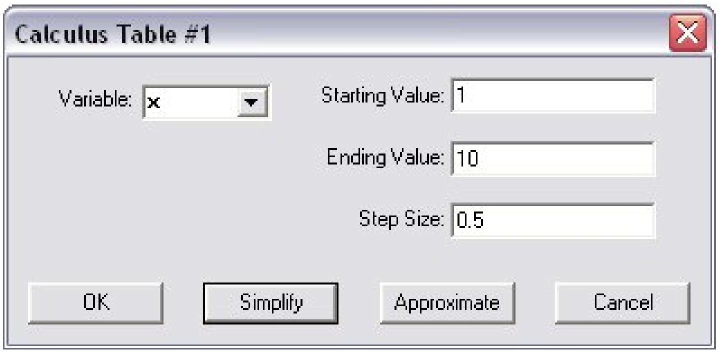



**Figura 10**
Fuente: **Elaboración propia**

Dentro de los campos, podemos anotar el *valor inicial*, que en este caso es 1, el *valor final* que es 6 y el *rango de aproximación* que deseamos, podemos hacerlo para este ejemplo de 0.5, veamos lo que aparece en el área de trabajo:

$$\#1: \quad y = x^2$$

$$\#2: \quad \text{TABLE}(y = x^2,\ x,\ 1,\ 6,\ 0.5)$$

$$\#3: \quad \begin{bmatrix} 1 & y = 1 \\ 1.5 & y = 2.25 \\ 2 & y = 4 \\ 2.5 & y = 6.25 \\ 3 & y = 9 \\ 3.5 & y = 12.25 \\ 4 & y = 16 \\ 4.5 & y = 20.25 \\ 5 & y = 25 \\ 5.5 & y = 30.25 \\ 6 & y = 36 \end{bmatrix}$$

## Establecer un sistema de ecuaciones

Para resolver un sistema de ecuaciones en *Derive*, introducimos las ecuaciones de acuerdo al número de expresión que tengan en la ventana de trabajo, como se muestra a continuación:

```
Encontrar los puntos de intersección entre la elipse y
la recta
```

#1: $x^2 + x \cdot y + y^2 = 16$

#2: $y = x + 2$

```
Establecemos un sistema de ecuaciones entre la expresión
#1 y #2
```

## Usamos el menú SOLVE y el comando SYSTEM

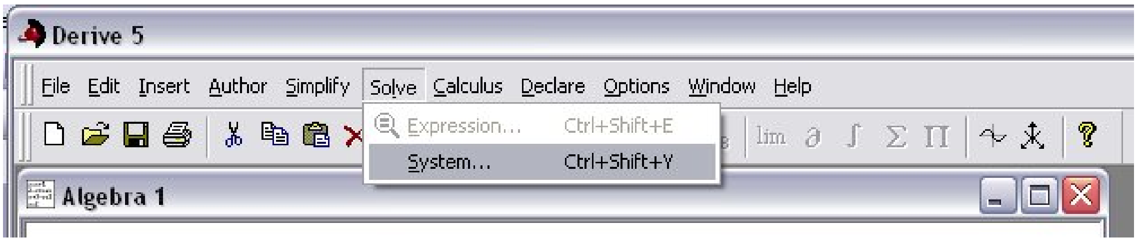



**Figura 11**
Fuente: **Elaboración propia**

Aparece el siguiente cuadro de diálogo:

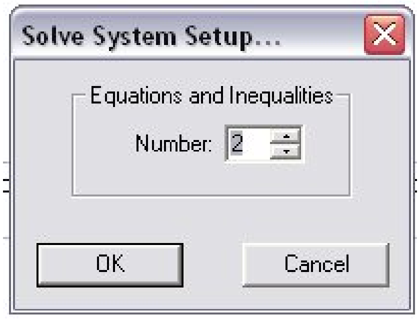



**Figura 12**
Fuente: **Elaboración propia**

Indicamos el número de ecuaciones que deseamos resolver, a continuación, aparece otro cuadro de dialogo, donde indicamos el número de las expresiones que aparecen en la ventana de trabajo.

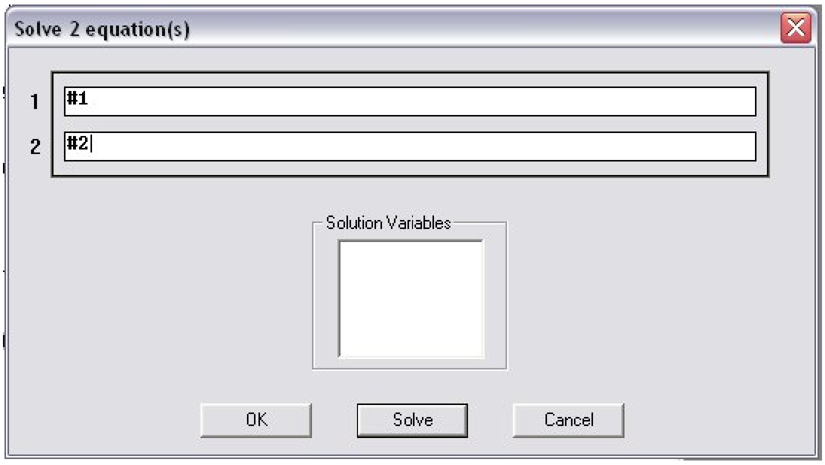



**Figura 13**
Fuente: **Elaboración propia**

#3: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[x^2 + x\cdot y + y^2 = 16,\ y = x + 2\right],\ [x,\ y]\right)$

#4: $[x = \sqrt{5} - 1 \wedge y = \sqrt{5} + 1,\ x = -\sqrt{5} - 1 \wedge y = 1 - \sqrt{5}]$

Definimos los puntos de intersección como A y B respectivamente

#5: $[\sqrt{5} - 1,\ \sqrt{5} + 1]$

#6: $[-\sqrt{5} - 1,\ 1 - \sqrt{5}]$

Podemos usar el software primero como una forma de comprobar los cálculos realizados por los alumnos y en otra etapa posterior, manejar las gráficas, que es parte de la finalidad de la propuesta.

## Graficas usando Derive

*Derive* define los valores de los puntos, anotando las coordenadas entre corchetes. Para visualizar las gráficas de los cálculos anteriores, utilizamos el siguiente procedimiento:

Presionamos el botón para graficar en dos dimensiones.


**Figura 14**
Fuente: **Elaboración propia**

Seleccionamos en la ventana de trabajo, la expresión que deseamos visualizar en la pantalla.

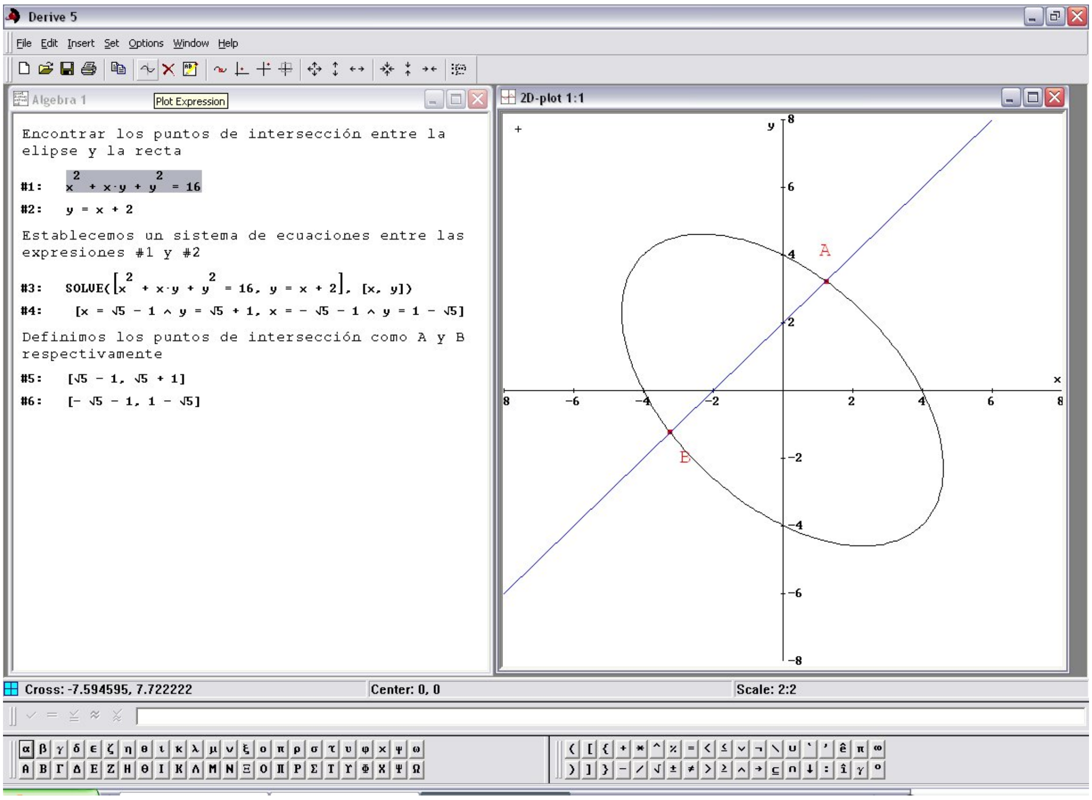



**Figura 15**
Fuente: **Elaboración propia**

## Despejar una variable de una expresión algebraica

Usando el comando solve, podemos obtener el valor de la expresión de acuerdo a una variable determinada, por ejemplo:

Despejar $y$ de la expresión: $x^2 + xy + y^2 = 16$

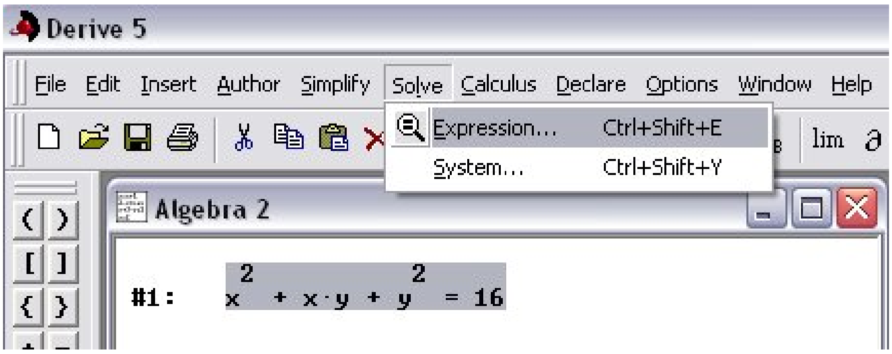



**Figura 16**
Fuente: **Elaboración propia**

Aparece el cuadro de diálogo:

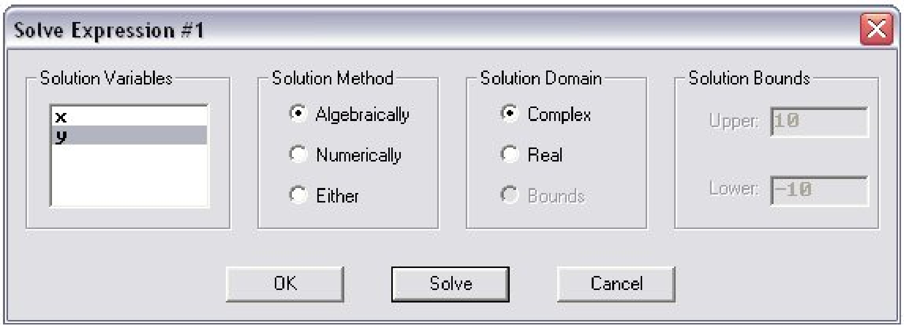



**Figura 17**
Fuente: **Elaboración propia**

Al presionar el botón SOLVE, obtenemos:

$$\#1: \quad x^2 + x \cdot y + y^2 = 16$$

$$\#2: \quad \mathrm{SOLVE}(x^2 + x \cdot y + y^2 = 16,\ y)$$

$$\#3: \quad y = \frac{\sqrt{(64 - 3 \cdot x^2)} - x}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{(64 - 3 \cdot x^2)} + x}{2}$$

Podemos escribir las expresiones por separado y dibujarlas

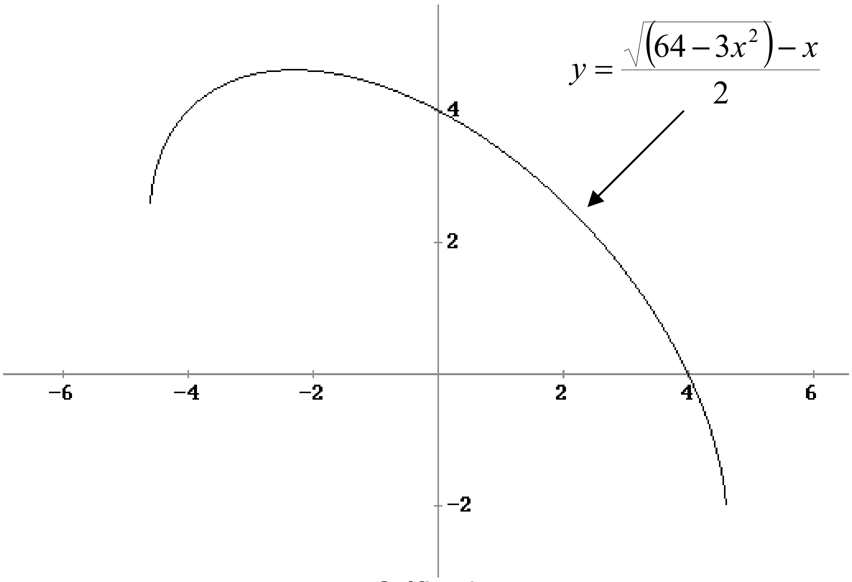
$$\#4: \quad y = \frac{\sqrt{(64 - 3 \cdot x^2)} - x}{2}$$

$$\#5: \quad y = -\frac{\sqrt{(64 - 3 \cdot x^2)} + x}{2}$$

$$\#4: \quad y = \frac{\sqrt{(64 - 3\cdot x^2)} - x}{2}$$

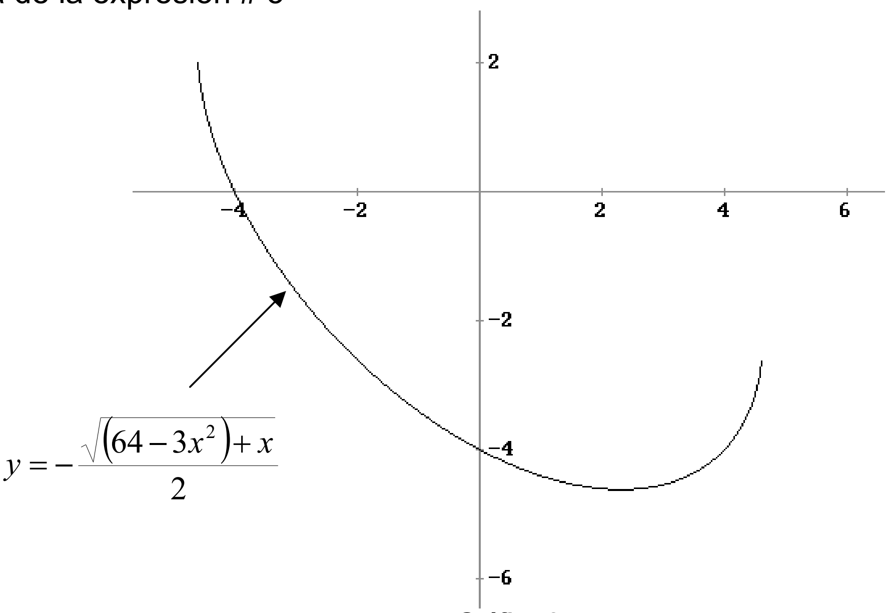
$$\#5: \quad y = - \frac{\sqrt{(64 - 3\cdot x^2)} + x}{2}$$

Gráfica de la expresión #4




**Gráfica 1**
Fuente: **Elaboración propia**

Gráfica de la expresión # 5




**Gráfica 2**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comando APROXIMATE

Permite establecer el modo de exactitud con que deseamos obtener los resultados. Por ejemplo cinco dígitos para el cálculo de $\sqrt{2}$

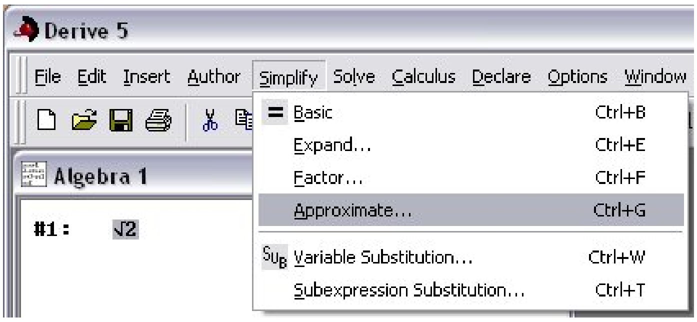



**Figura 18**
Fuente: **Elaboración propia**

Aparece otro cuadro de diálogo, donde elegimos el número de aproximación requerido.

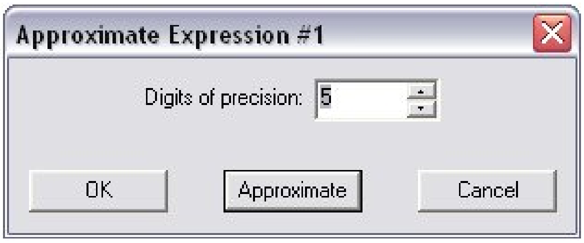



**Figura 19**
Fuente: **Elaboración propia**

De esta manera, obtenemos el valor de:

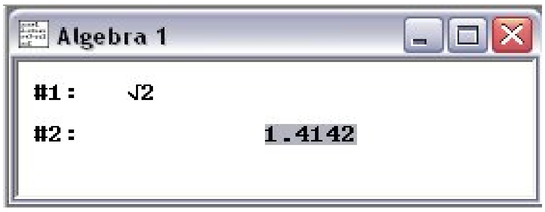



**Figura 20**
Fuente: **Elaboración propia**

Veamos, en el siguiente ejemplo, las opciones que permite el software para dibujar la gráfica de una expresión algebraica:

*Dibujar la elipse representada por la expresión* $x^2 + 2y^2 = 4$

Anotamos la expresión en la ventana de trabajo.

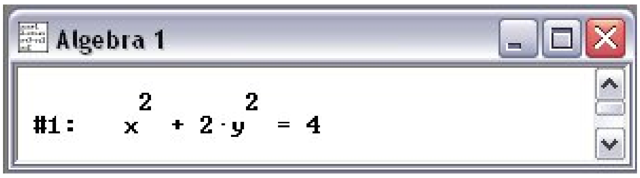
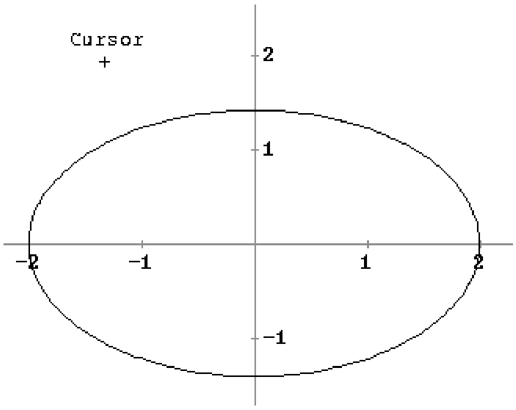



**Figura 21**
Fuente: **Elaboración propia**

La gráfica de la elipse es la mostrada en la gráfica 3:




**Gráfica 3**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comando CENTER

El comando CENTER permite visualizar otra zona distinta de la gráfica. Cuando se representa gráficamente una función, el centro de la ventana de dibujo coincide con el origen de coordenadas.

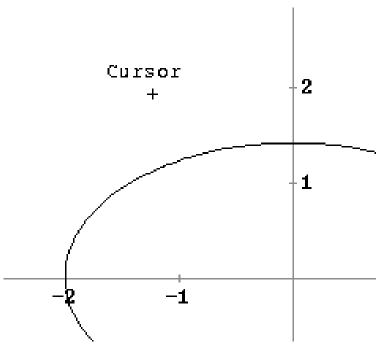



**Figura 22**
Fuente: **Elaboración propia**

Al seleccionar CENTER, el punto del plano en que se encuentre el cursor de posición, se hará coincidir con el centro de la ventana, con lo que se representa otra zona de la gráfica.

## El comando anterior, combinado con el comando ZOOM (Enfocar):

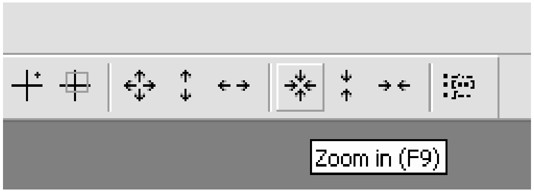



**Figura 23**
Fuente: **Elaboración propia**

Permite visualizar detalles de la gráfica, como se muestra en la figura 24.

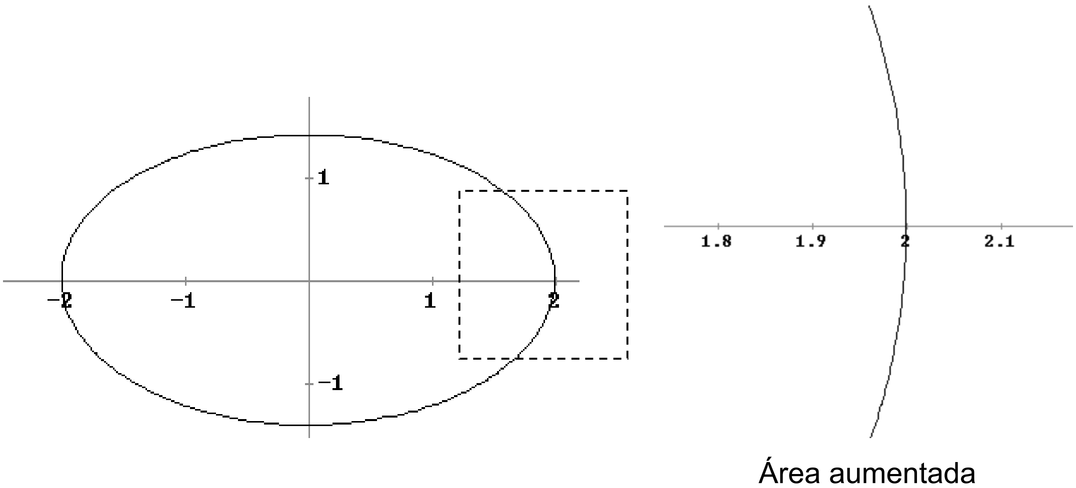



**Figura 24**
Fuente: **Elaboración propia**

El comando *zoom*, se utiliza para cambiar la escala de representación de la gráfica obtenida, esta opción puede realizarse para cada eje.

Al usar el comando *zoom*, consideremos que pueden deformarse las gráficas por efecto de la escala que se este usando como se ve en los siguientes ejemplos:

Al dibujar la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$

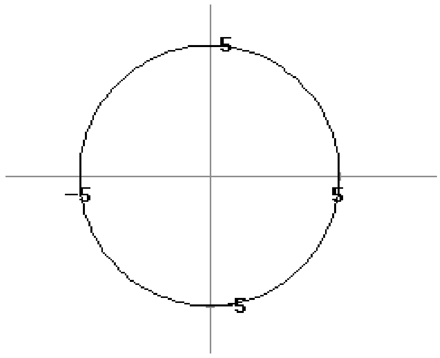



**Figura 25**
Fuente: **Elaboración propia**

Si usamos un zoom horizontal, aunque numéricamente son las mismas coordenadas, la gráfica se distorsiona y parece una elipse.

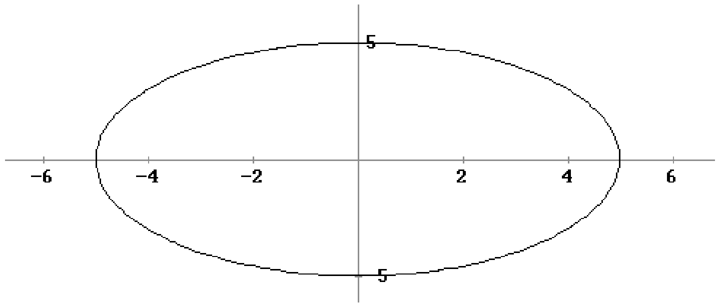



**Figura 26**
Fuente: **Elaboración propia**

Un aspecto importante a considerar por parte del profesor, es el uso de colores para diferenciar los distintos tipos de curvas, rectas y puntos en las gráficas.

Cuando iniciamos a trabajar con algún software con la opción de gráficos como el *Derive*, debemos tener precaución con lo que se nos presenta en la pantalla, ya que se puede confiar plenamente sin considerar aspectos como la aproximación que podemos usar en la expresión algebraica, como se muestra en el siguiente ejemplo:

*Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse representada por la expresión* $3x^2 + y^2 = 10$ *que pasa por el punto* $A\,(1, \sqrt{7}\,)$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la elipse está definido por la expresión:

$m = \dfrac{-6x}{2y}$ Que al evaluarse en el punto A, obtenemos $m = \dfrac{-6}{2\sqrt{7}}$

Más adelante, en los casos de aplicación, detallaremos el cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva, en este ejercicio, nos enfocamos solamente en la gráfica.

En este tipo de expresiones, el alumno puede inclinarse a usar el equivalente de la expresión anterior como:

$\sqrt{7} = 2.645751311$ como 2.65

de igual forma

$m = \dfrac{-6}{2\,(2.65)} = -1.132075472$ como -1.13

Analicemos, usando el software las dos maneras de representar las expresiones, aproximando o usando las expresiones algebraicas:

| *Expresión algebraica* | *Aproximando los valores* |
|---|---|
| $m = \dfrac{-6}{2\,\sqrt{7}}$ | $m = -1.13$ |
| $A\,(1, \sqrt{7}\,)$ | $A\,(1, 2.65)$ |

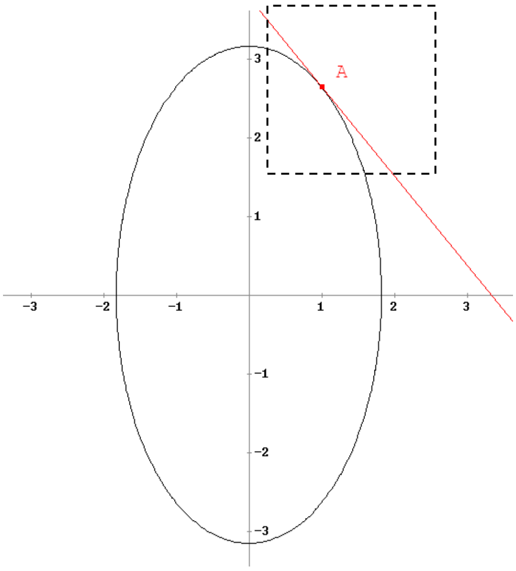
Al usar estos valores en la forma punto pendiente de la ecuación de la recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos las siguientes ecuaciones de la recta tangente:

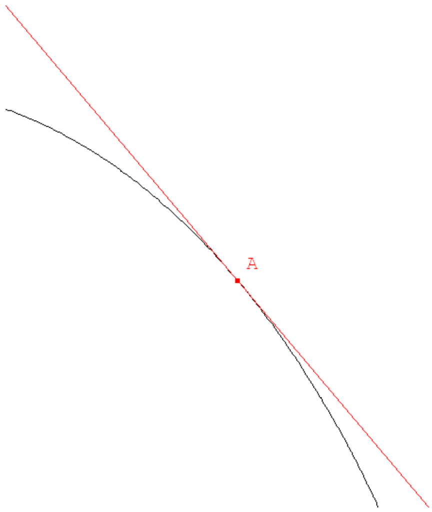
| | |
|---|---|
| Expresión algebraica | $y - \sqrt{7} = \dfrac{-6}{2\sqrt{7}}\,(x-1)$ |
| Aproximando los valores numéricos | $y - 2.56 = -1.13(x-1)$ |

Analizando la gráfica de la elipse, el punto A y la recta tangente, podemos apreciar la diferencia en la gráfica que no se percibe como tal, en las expresiones algebraicas anteriores.

Gráfica de la recta tangente a la elipse $3x^2 + y^2 = 10$ usando la expresión

$$y - \sqrt{7} = \frac{-6}{2\sqrt{7}}(x-1)$$



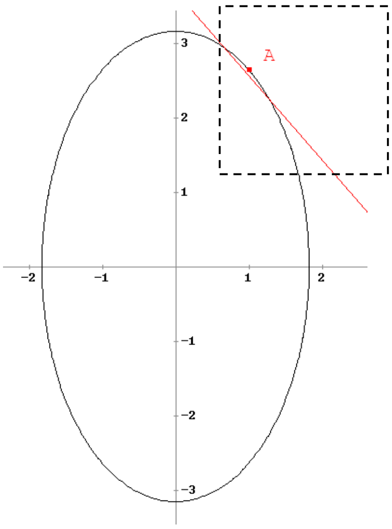



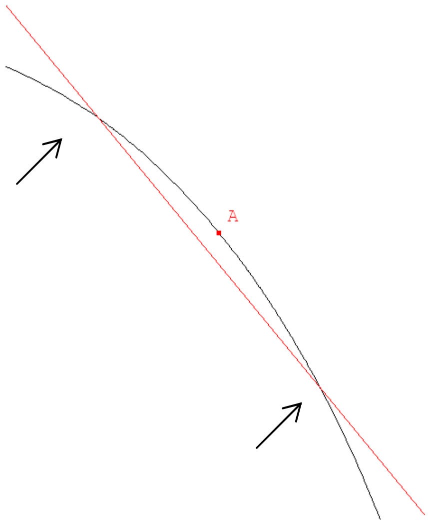

Área aumentada

**Figura 27**
Fuente: **Elaboración propia**

Gráfica de la recta tangente a la elipse $3x^2 + y^2 = 10$ usando la expresión:

$$y - 2.56 = -1.13(x-1)$$




Área aumentada

**Figura 28**
Fuente: **Elaboración propia**

Debido a la aproximación usada en la elaboración de la gráfica, la recta parece secante, no tangente como algebraicamente lo manejamos con los alumnos, aún dibujando la recta en el pizarrón con cuidado o con papel milimétrico por parte de los alumnos, esta desventaja, puede ser de utilidad para enfocarnos al manejo de valores numéricos con la elaboración de tablas para que el alumno pueda encontrar la recta tangente a una curva con los elementos que cuenta en este nivel y sirva de apoyo para los cursos que más adelante se le presenten en el caso de cálculo o en la interpretación de gráficas.

Por lo visto anteriormente, es recomendable mencionar este tipo de errores de estimación al interpretar las gráficas, por lo que el docente debe combinar los procesos algebraicos con la presentación de gráficas para evitarlos.

Al elaborar ejemplos como este para que el alumno confirme sus cálculos, se muestra que el software está limitado a lo que el usuario decida usar. Este aspecto es importante por que se puede abordar como una debilidad en el uso del software pero como una fortaleza del maestro.

# Casos de aplicación

De acuerdo con Oteyza, E. et al. (1994). En su libro Geometría Analítica, es posible dar argumentos puramente geométricos para calcular la tangente a una elipse, sin embargo, los cálculos son algo laboriosos. Utilizando el calculo diferencial, las operaciones son más sencillas; en las matemáticas pasa con frecuencia que hay problemas que se pueden resolver con poca herramienta teórica de una manera bastante laboriosa y también se pueden resolver utilizando herramientas más poderosas de una manera más simple.

El uso de algunos conceptos de cálculo puede efectivamente facilitar la solución de problemas relativos a la tangente a una curva, pero presenta desventajas en el aspecto didáctico, al momento de llevarlo a cabo con alumnos de preparatoria, en el nivel de tercer semestre que es cuando se aborda la asignatura de geometría analítica.

La dificultad principal no aparece en el hecho de no poderse llevar a cabo con el software ni en el manejo adecuado del algebra como se aprecia en el ejemplo que se ve más adelante, sino por el nivel de conocimientos de algebra, notación y domino de conceptos con los que cuenta el alumno en este semestre, Las teorías constructivistas del aprendizaje asumen que éste consiste básicamente en una reestructuración de los conocimientos anteriores, más que en la sustitución de unos conocimientos por otros, (Pozo, 2000).

De implementarse con alumnos de este grado se corre el riesgo de saturar al alumno con nuevos conceptos como el de la derivación implícita que en sí es un concepto complejo aún para los alumnos de los últimos semestres en el bachillerato. Por el contrario, si manejamos adecuadamente esta propuesta, se tiene la oportunidad de más adelante, en los cursos de cálculo retomar la idea y reforzarla.

**Usando derivación implícita, de acuerdo a lo visto anteriormente:**

Si $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Es una elipse horizontal con centro en el origen, la pendiente de la recta tangente a ella en un punto $P(x_1, y_1)$ está dada por la derivada de $y$ con respecto a $x$ evaluada en P: para calcular esta derivada, utilizamos la derivación implícita:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

Despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

Así que la pendiente de la recta tangente a la elipse en P es:

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

De esta manera podemos encontrar la expresión de la pendiente de la recta tangente a esta curva, pero podemos usar una forma más general para las cónicas

De acuerdo con Saenz L. (2007) La ecuación de la línea tangente a una cónica general.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Derivando implícitamente es:

$$2Ax+B(xy'+y)+2Cy'y+D+Ey'=0$$

$$y'=-\frac{2Ax+By+D}{Bx+2Cy+E}$$

## Contraejemplo

De acuerdo con Oteyza, E. et al. (1994), es posible resolver el problema de la tangente a una curva usando derivación implícita:

*Encuentra la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto indicado*

$x^2 + 5y^2 + 14x - 30y + 69 = 0 \qquad P(-7-\sqrt{5},1)$

Usando derivación implícita

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 5y^2 + 14x - 30y + 69) = 0$$

$$2x + 10y\frac{dy}{dx} + 14 - 30\frac{dy}{dx} = 0$$

$$10y\frac{dy}{dx} - 30\frac{dy}{dx} = -2x - 14$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - 30) = -2x - 14$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-14}{10y-30} \qquad \text{simplificando}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-7}{5y-15}$$

Con este valor, se obtiene la ecuación de la recta tangente.

Evaluando para encontrar el valor numérico de la pendiente en ese punto.

$$m = \frac{-\left(-7-\sqrt{5}\right)-7}{5(1)-15} = \frac{7+\sqrt{5}-7}{5-15} = -\frac{\sqrt{5}}{10}$$

La ecuación de la recta tangente en ese punto está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad y - 1 = \frac{\sqrt{5}}{-10}\left(x + 7 + \sqrt{5}\right)$$

## Usando DERIVE

```
Define la función en x

             2      2
#1:   f(x) := x  + 5·y  + 14·x - 30·y + 69 = 0

Define la función en y

             2      2
#2:   f(y) := x  + 5·y  + 14·x - 30·y + 69 = 0
```

Evalúa la función en el punto y=1

#3: f(1)

#4: SOLVE(f(1), x)

#5: $x = -\sqrt{5} - 7 \vee x = \sqrt{5} - 7$

Define el valor de la pendiente

#6: $g(x, y) := \dfrac{-x - 7}{5 \cdot y - 15}$

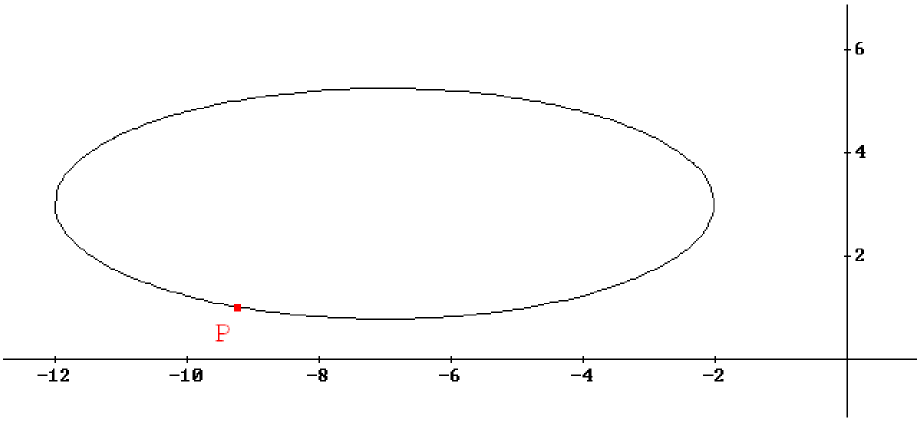
En el punto P

#7: $[-7 - \sqrt{5}, 1]$

#8: $g(-7 - \sqrt{5}, 1)$

#9: SOLVE($g(-7 - \sqrt{5}, 1)$)

#10: $-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$




**Gráfica 4**
Fuente: **Elaboración propia**

Define la ecuación de la recta en la forma punto pendiente

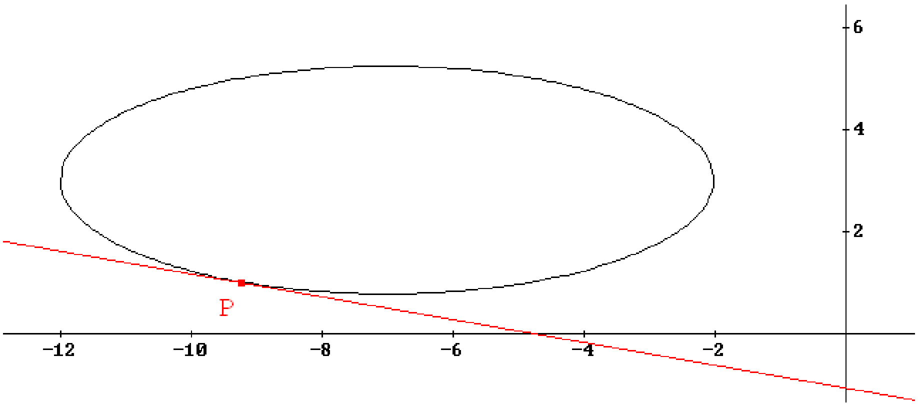
#15: $h(x1, y1, m) := y - y1 = m \cdot (x - x1)$

#16: $h\left(-7 - \sqrt{5}, 1, -\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$

$$\#17: \quad \text{SOLVE}\left(h\left(-7-\sqrt{5},\ 1,\ -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\right)$$

$$\#18: \quad y = -\frac{\sqrt{5}\cdot x}{10} - \frac{7\cdot\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$$

Ecuación de la recta tangente en P




**Gráfica 5**
Fuente: **Elaboración propia**

### Aspectos a considerar usando el software de esta forma combinado con derivación implícita

Como vimos en el ejemplo anterior, puede encontrarse la tangente a una curva usando solamente el software con algunas herramientas de cálculo diferencial, pero la desventaja de usarlo en este grado principalmente es que los alumnos no tienen los conocimientos adecuados sobre los conceptos que se manejan y puede confundirles el manejo de la notación; simplemente carecen de los conocimientos previos adecuados para usar el software de una forma práctica ya que de acuerdo a las teoría construcivistas solo puede aprenderse aquello que podemos ligar a un conocimiento previo. Al abordar el concepto de la tangente a una curva usando los elementos con los que el alumno cuenta en este punto de su preparación como se maneja en la metodología mostrada, puede servir de base  para cuando se aborde esta tema en los últimos semestres o para cursos posteriores.

**Caso 1.** *La expresión $x^2 + y^2 = 25$ representa una circunferencia, encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$*

**Como se enseña actualmente.**

El problema requiere encontrar la ecuación de la tangente en los puntos comunes a la recta y a la curva cuando $x = 1$, iniciamos haciendo un bosquejo en el pizarrón o directamente con los cálculos algebraicos.

**Procedimiento**

Abordamos el problema despejando $y$ para definir el valor $f(x)$ en el punto $x = 1$

$x^2 + y^2 = 25$

$y^2 = -x^2 + 25$

$y = \pm\sqrt{-x^2 + 25}$

evaluamos $x = 1$

$y = \pm\sqrt{-1 + 25}$

$y = \pm\sqrt{24}$

Lo anterior, define los puntos

$A\left(1, \sqrt{24}\right)$ y $B\left(1, \sqrt{24}\right)$

De acuerdo con Lehmann (1969)

**Teorema**

La tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva tiene por ecuación $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$

**Teorema**

Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son:

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

Con los datos del problema.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$A\left(1, \sqrt{24}\right)$$
$$B\left(1, -\sqrt{24}\right)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto A es:

$$x + \sqrt{24}y = 25$$

La ecuación de la recta tangente en el punto B es:

$$x - \sqrt{24}y = 25$$

**Observaciones**

Las fórmulas solo se aplican a las curvas de la forma anteriormente descrita para casos como $A(x+h)^2 + Bxy + C(y+k)^2 + F = 0$ sería más complejo despejar $y$ para aplicar los teoremas anteriores.

Si continuamos impartiendo la asignatura de esta manera, la mayoría de los alumnos solo confían en la precisión de los cálculos realizados por el maestro; ya que solo él tiene la certeza y se pierde la iniciativa para que el alumno sea el que plantee estrategias de solución. Por su parte el maestro, dibuja la curva usando gis pizarrón y el alumno por su parte hace el dibujo en papel milimétrico en el mejor de los casos, de esta manera se consume gran parte del tiempo de clase y se resuelven muy pocos problemas por clase.

En la mayoría de las veces no le queda claro al alumno una estrategia de solución en los problemas, solo se limita a seguir los pasos del profesor, por ejemplo, no les explicamos lo que implica geométricamente que la expresión:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = -x^2 + 25$$
$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 25}$$

Al despejar $y$ y dibujarlas por separado, representan dos semicircunferencias, y que podemos trabajar con el segmento que sea de interés para el problema sin afectar su solución como veremos más adelante.

De acuerdo con la propuesta, al abordar este tema usamos **organizadores avanzados.** Este material se proporciona al alumno antes de abordar el tema y de usar la computadora para que sirva de enlace con los nuevos conocimientos.

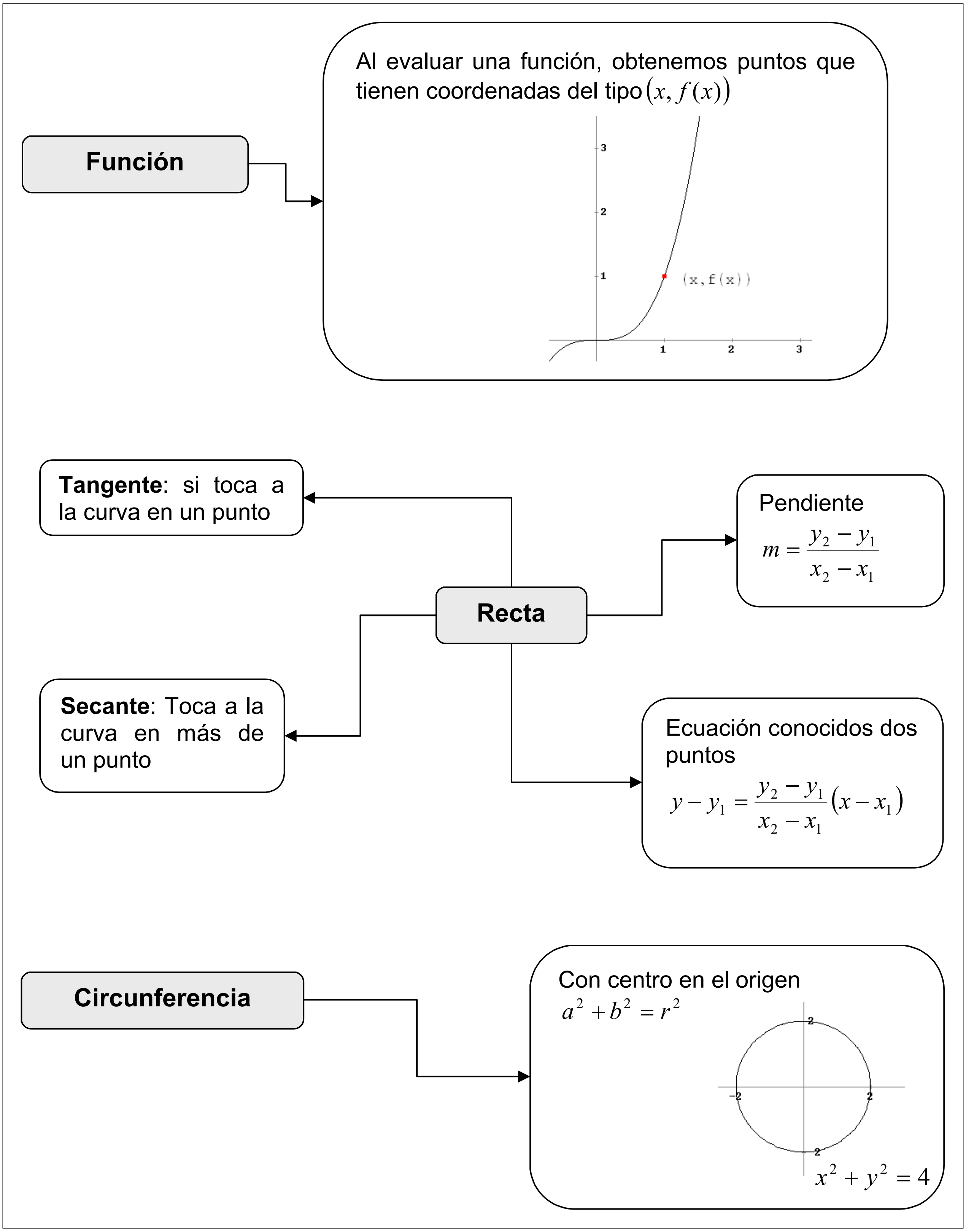



**Ilustración 1**
Fuente: **Elaboración propia**

Procedimiento Usando el ***software Derive***

Después de revisar el contenido de los Organizadores Avanzados, resolvemos el problema usando software:

A continuación se presentan una serie de pasos a considerar por parte del alumno para la resolución del problema, las secuencias de datos son imágenes tomadas de la ventana de trabajo del derive.

#1: $x^2 + y^2 = 25$

Despejamos (y) para obtener su valor, cuando x=1

#2: $\text{SOLVE}(x^2 + y^2 = 25, y)$

#3: $y = -\sqrt{(25 - x^2)} \vee y = \sqrt{(25 - x^2)}$

Definimos y dibujamos las expresiones anteriores, trabajamos inicialmente con:

#4: $y = -\sqrt{(25 - x^2)}$

definimos la expresión:

#5: $f(x) := -\sqrt{(25 - x^2)}$

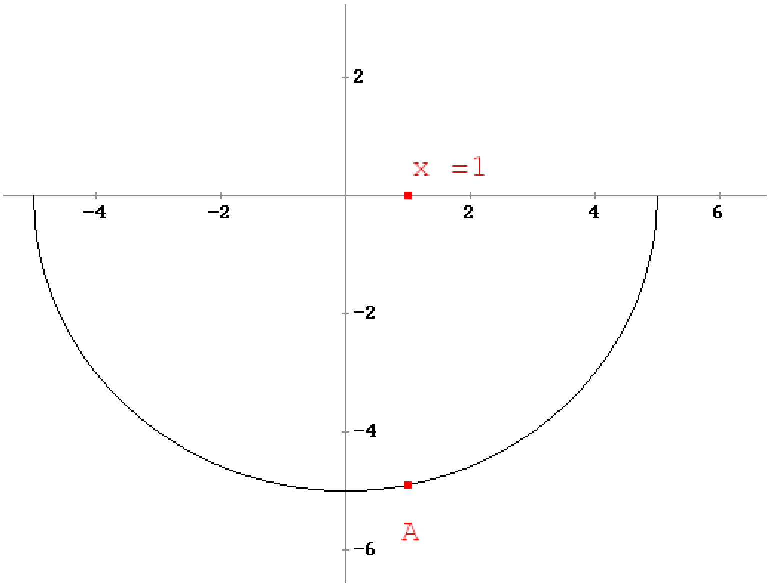
cuando x=1

#6: $f(1)$

#7: $-2\cdot\sqrt{6}$

Lo que define el punto A

#8: $[1, -2\cdot\sqrt{6}]$




**Gráfica 6**
Fuente: **Elaboración propia**

ubicamos un punto cercano al punto A; por ejemplo x=1.5

#9: f(1.5)

#10: $-\frac{\sqrt{91}}{2}$

Lo que define al punto B

#11: $\left[1.5, -\frac{\sqrt{91}}{2}\right]$

Con estos dos puntos, definimos una recta secante a la curva, que de acuerdo a la forma dos puntos de la ecuación de la recta, es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definimos la expresión:

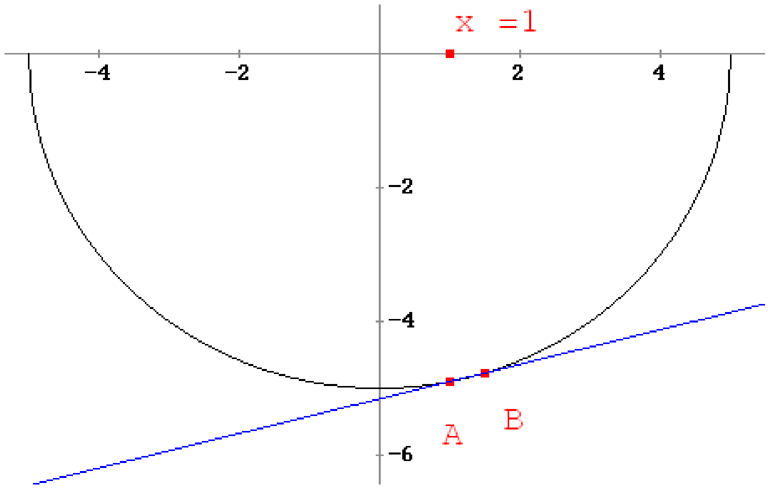
#12: $f(x1, y1, x2, y2) := y - y1 = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}\cdot(x - x1)$

Evaluamos los puntos A y B

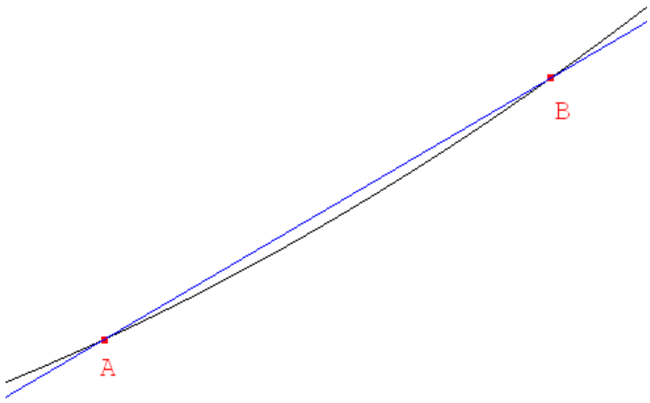
#13: $f\left(1, -2\cdot\sqrt{6}, 1.5, -\frac{\sqrt{91}}{2}\right)$

#14: $y + 2\cdot\sqrt{6} = (x - 1)\cdot(4\cdot\sqrt{6} - \sqrt{91})$

Que es la ecuación de la recta secante que pasa por A y B




**Gráfica 7**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 8**
Fuente: **Elaboración propia**

## ¿Cómo acercar la recta secante al punto de tangencia?

Con base en la expresión que define a la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Consideramos que ya conocemos las coordenadas de un punto (el punto de tangencia) $A(x_2, y_2)$, por lo que generamos una tabla de valores, usando el software; cada vez más cercanos al punto A, es decir, más cercanos a x = 1 en este caso, con lo que se van generando secantes que se acercan cada vez más al punto de tangencia y al valor de la pendiente, como se aprecia en la figura 29:

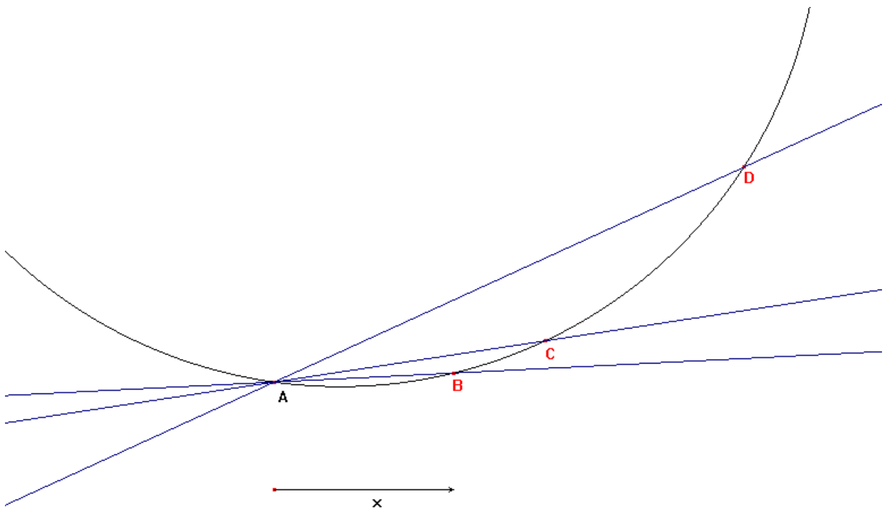



**Figura 29**
Fuente: **Elaboración propia**

$$\#15:\quad y = -\sqrt{(25 - x^2)}$$

$$\#16:\quad \text{TABLE}(y = -\sqrt{(25 - x^2)},\ x,\ [1.4,\ 1.2,\ 1.1])$$

$$\#17:\quad \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & y = -\frac{24}{5} \\ \frac{6}{5} & y = -\frac{\sqrt{589}}{5} \\ \frac{11}{10} & y = -\frac{\sqrt{2379}}{10} \end{bmatrix}$$

Al acercarse x=1.1, el valor de y=-4.877499359

Nos acercamos más al punto A

$$\#18:\quad \text{TABLE}(y = -\sqrt{(25 - x^2)},\ x,\ [1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001,\ 1.00001])$$

$$\#19:\quad \begin{bmatrix} \frac{11}{10} & y = -\frac{\sqrt{2379}}{10} \\ \frac{101}{100} & y = -\frac{\sqrt{239799}}{100} \\ \frac{1001}{1000} & y = -\frac{\sqrt{23997999}}{1000} \\ \frac{10001}{10000} & y = -\frac{\sqrt{2399979999}}{10000} \\ \frac{100001}{100000} & y = -\frac{\sqrt{239999799999}}{100000} \end{bmatrix}$$

$$\#20:\quad \frac{100001}{100000}$$

$$\#21:\quad 1.00001$$

$$\#22:\quad -\frac{\sqrt{239999799999}}{100000}$$

$$\#23:\quad -4.898977444$$

Al acercar x= 1.00001 el valor de y es -4.8988977444

Usamos la expresión de la pendiente de la recta, considerando que el punto anterior es lo bastante cercano al punto de tangencia.

$$\#24:\quad f(x1,\ y1,\ x2,\ y2) := \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Usamos las coordenadas del punto A

$$\#25:\quad [1,\ -2\cdot\sqrt{6}]$$

Y las coordenadas del nuevo punto

$$\#26:\quad [1.00001,\ -4.898977444]$$

$$\#27:\quad f(1.00001,\ -4.898977444,\ 1,\ -2\cdot\sqrt{6})$$

$$\#28:\quad 200000\cdot\sqrt{6} - \frac{1224744361}{2500}$$

$$\#29:\quad 0.2041565620$$

Notemos que 1.00001 es un valor bastante cercano a 1 de acuerdo a las necesidades y los conocimientos adquiridos por los alumnos en el bachillerato.

Además $-2\sqrt{6}$ es -4.898979486 que a su vez es muy cercano a -4.898977444 que calculamos, el cual es un valor razonablemente cercano al de la pendiente de la recta tangente en el punto A.

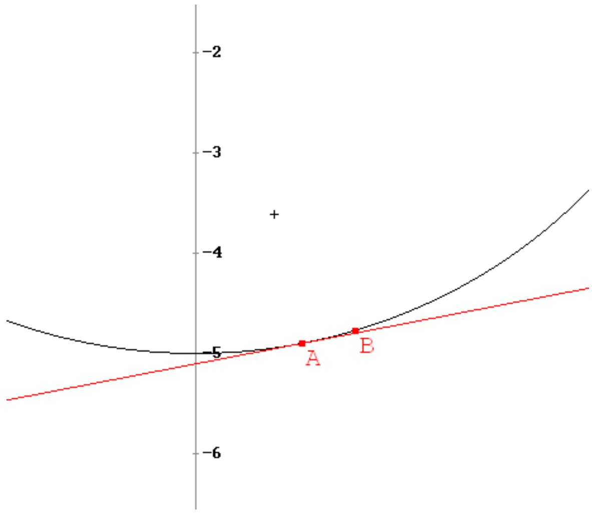
Ahora, encontramos la ecuación de la recta tangente en ese punto, usando la forma punto pendiente, con el punto A y el valor de la pendiente que calculamos.

#30: $f(x1, y1, m) := y - y1 = m \cdot (x - x1)$

#31: $f(1, -2 \cdot \sqrt{6}, 0.204156562)$

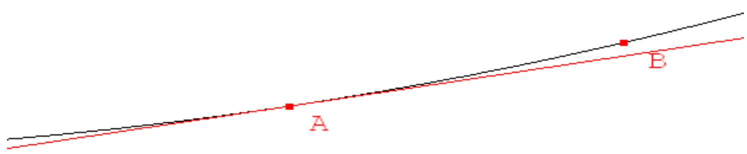
#32: $$y + 2 \cdot \sqrt{6} = \frac{102078281 \cdot (x - 1)}{500000000}$$

Dibujamos la recta para verificar si es tangente en ese punto.



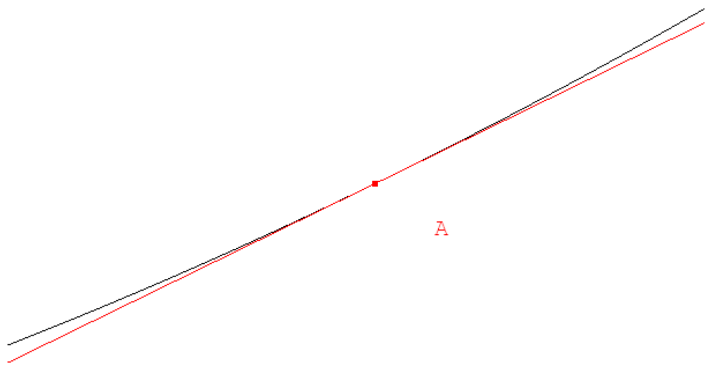

**Gráfica 9**
Fuente: **Elaboración propia**

Usamos el comando zoom para acercar la gráfica en el punto A

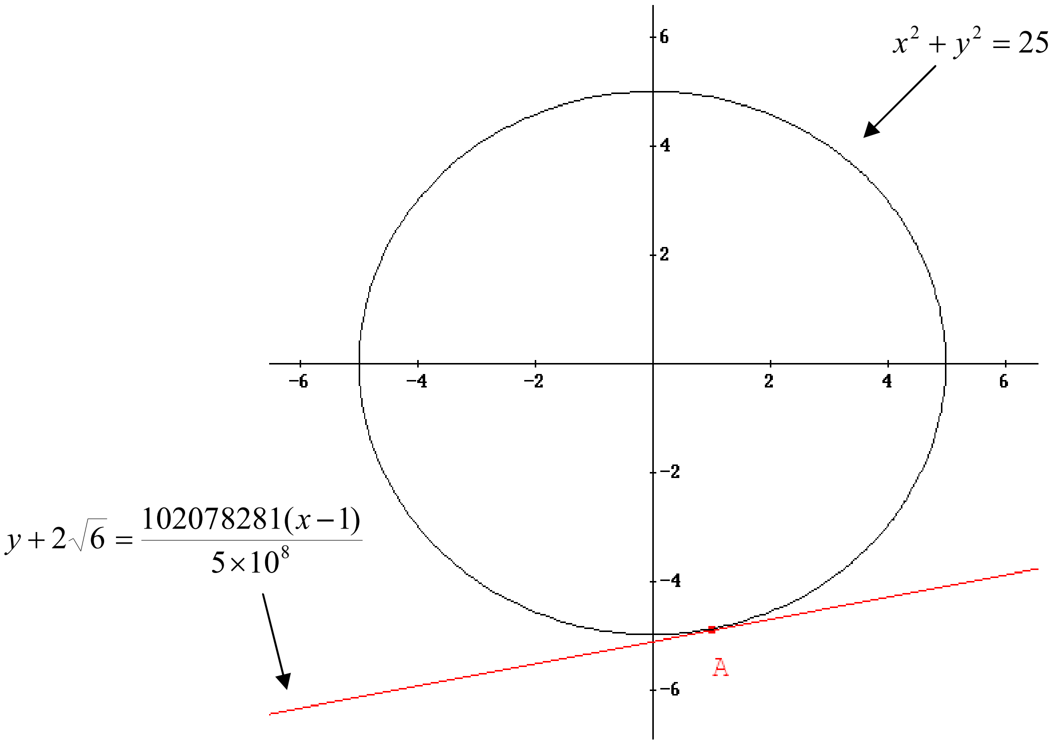



**Gráfica 10**
Fuente: **Elaboración propia**

Al acercar aún más la gráfica, podemos comprobar la tangencia de la recta con respecto al punto A.




**Gráfica 11**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 12**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comentarios

- Se pueden realizar más gráficas usando el software, además de la ventaja de la rapidez en los cálculos.
- Usando problemas específicos, se complementa el aspecto visual en la solución al tener la facilidad de realizar la gráfica al momento de llevar a cabo los procedimientos algebraicos, con lo que el alumno y el maestro pueden comprobar si se sigue una estrategia de solución adecuada.

**Caso 2** *Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia* $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ *en el punto (-1, 6).*

**Fuente:** Charles H. Lehmann (1969) **Geometría Analítica**. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. **(**p 127, prob. 1).

## Desarrollo

En este caso, el problema requiere encontrar la recta tangente a la circunferencia en un punto específico.
Usamos el material: organizadores avanzados, de acuerdo a la propuesta antes de resolver el problema y usar el software.

Los temas relacionados en este caso son:

- Evaluar una función, obteniendo puntos $(x, f(x))$
- Recta tangente y secante a una curva
- Pendiente de una recta
- Ecuación de la recta conociendo dos puntos
- Circunferencia con centro fuera del origen

Usando el software, despejamos $y$ para definir la función (semicircunferencia) con la que se va a trabajar de acuerdo al problema.

Definimos una recta secante en un punto cercano y vamos tomando valores cada vez más cercanos al punto de tangencia, hasta obtener un valor adecuado y definir la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Por último dibujamos la circunferencia y la recta tangente.

## Organizadores Avanzados

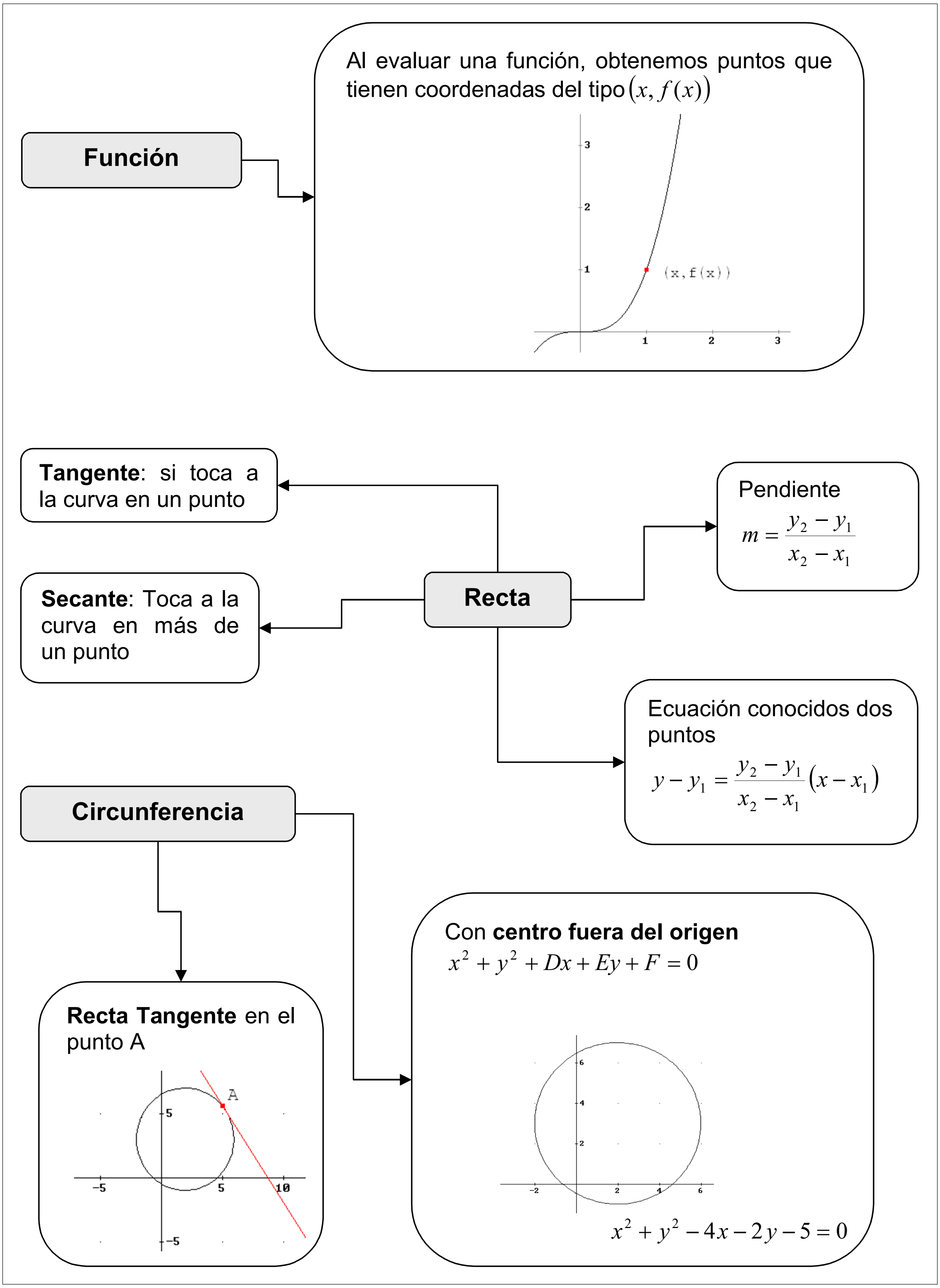



**Ilustración 2**
Fuente: **Elaboración propia**

Usando el ***software Derive***

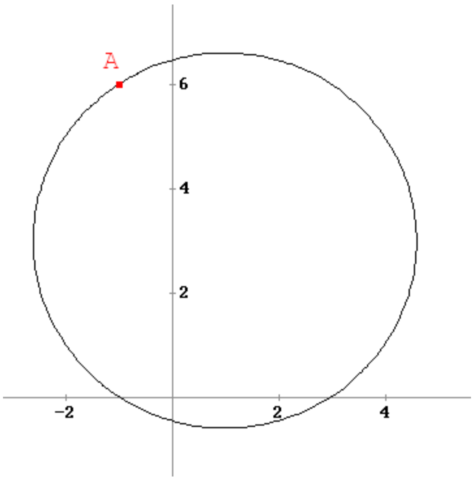
Circunferencia

#1: $x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 6 \cdot y - 3 = 0$

punto A

#2: [-1, 6]

Despejamos (y) de la expresión #1




**Gráfica 13**
Fuente: **Elaboración propia**

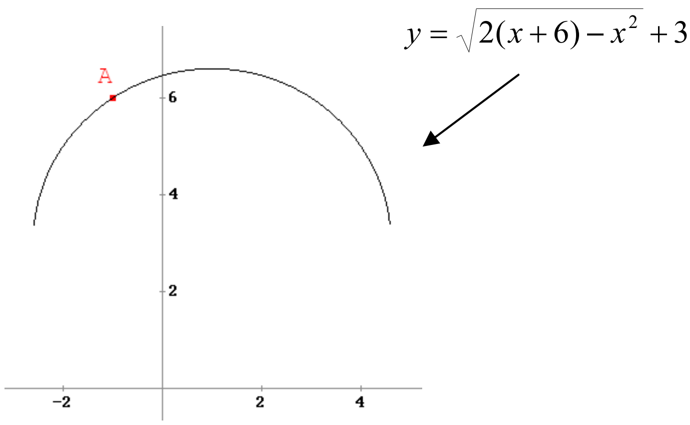
#3: $\text{SOLVE}(x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 6 \cdot y - 3 = 0, y)$

#4: $y = 3 - \sqrt{2 \cdot (x + 6) - x^2} \vee y = \sqrt{2 \cdot (x + 6) - x^2} + 3$

#5: $y = 3 - \sqrt{2 \cdot (x + 6) - x^2}$

#6: $y = \sqrt{2 \cdot (x + 6) - x^2} + 3$

Graficamos la expresión # 6, que es la que contiene al punto A.




**Gráfica 14**
Fuente: **Elaboración propia**

#7: $f(x) := \sqrt{2\cdot(x + 6) - x^2} + 3$

Definimos un punto B cercano al punto de tangencia A

#8: $f(-0.5)$

#9: $$\frac{\sqrt{43}}{2} + 3$$

Coordenadas del punto B

#10: $\left[-0.5, \frac{\sqrt{43}}{2} + 3\right]$

La pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos es:

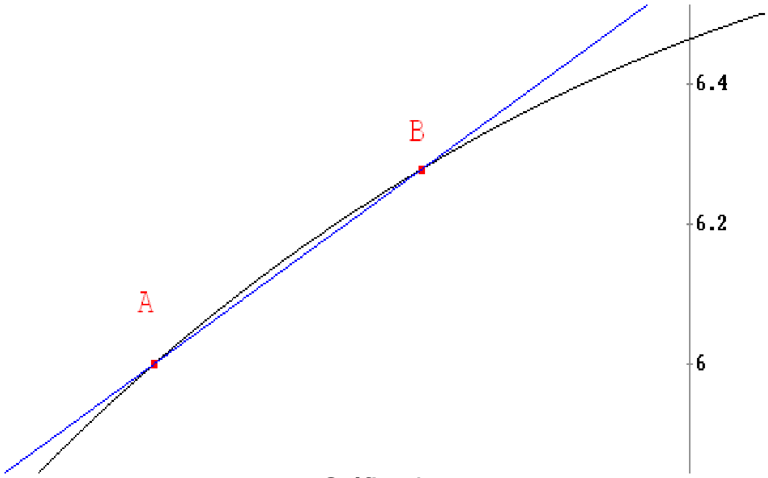
#11: $f(x1, y1, x2, y2) := \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#12: $f\left(-1, 6, -0.5, \frac{\sqrt{43}}{2} + 3\right)$

#13: $$\sqrt{43} - 6$$

Ecuación de la recta secante

#14: $y - 6 = (\sqrt{43} - 6)\cdot(x + 1)$




**Gráfica 15**
Fuente: **Elaboración propia**

En la expresión # 6 evaluamos puntos cada vez más cercanos a -1

#15: $\text{TABLE}(y = \sqrt{2\cdot(x + 6) - x^2} + 3,\ x,\ [-0.8,\ -0.99,\ -0.998,\ -0.999])$

#16:
$$\begin{bmatrix} -0.8 & y = 6.124099870 \\ -0.99 & y = 6.006642645 \\ -0.998 & y = 6.001332370 \\ -0.999 & y = 6.000666425 \end{bmatrix}$$

#17: $\text{TABLE}(y = \sqrt{2\cdot(x + 6) - x^2} + 3,\ x,\ [-1.1,\ -1.01,\ -1.001,\ -1.0001])$

#18:
$$\begin{bmatrix} -1.1 & y = 5.930870177 \\ -1.01 & y = 5.993309205 \\ -1.001 & y = 5.999333092 \\ -1.0001 & y = 5.999933330 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la expresión # 11 de la pendiente de la recta, el numerador es:

#19: $6 - 6.000666425$

#20: $-0.0006664249960$

El denominador

#21: $-1 + 0.999$

#22: $-0.001$

Una aproximación del valor de la pendiente es

#23: $f(x,\ y) := m = \dfrac{y}{x}$

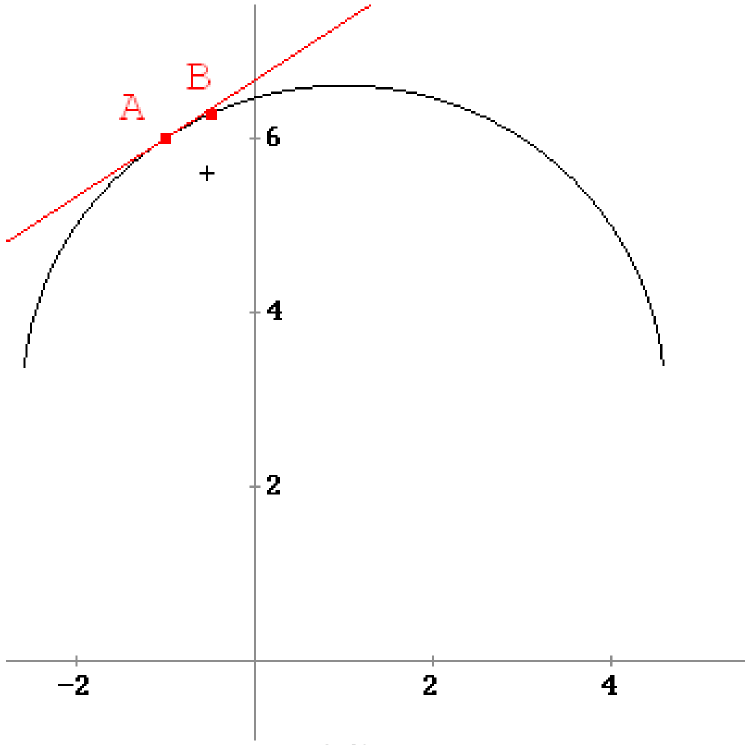
#24: $f(-0.001,\ -0.000666424996)$

#25: $m = 0.6664249960$

Con este valor podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto A

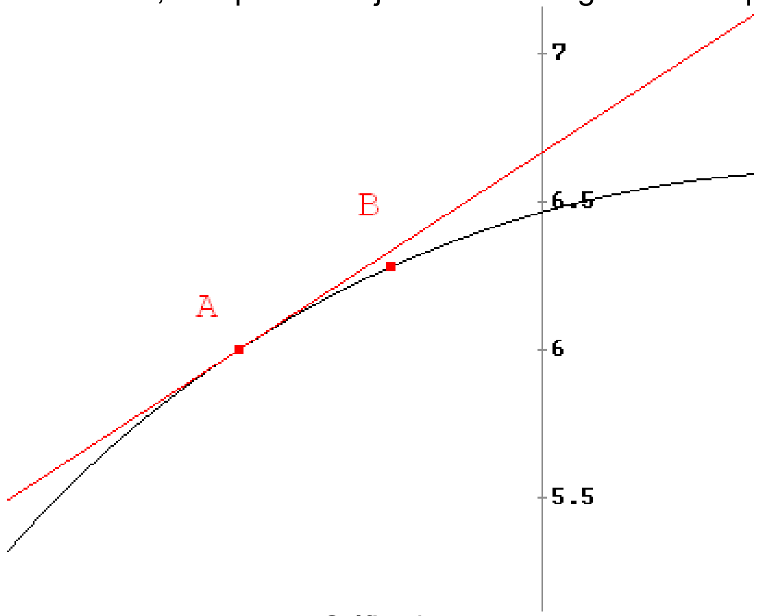
#26: $y - 6 = 0.666424996\cdot(x + 1)$

En la gráfica 16, podemos ver la recta tangente y los puntos A y B.

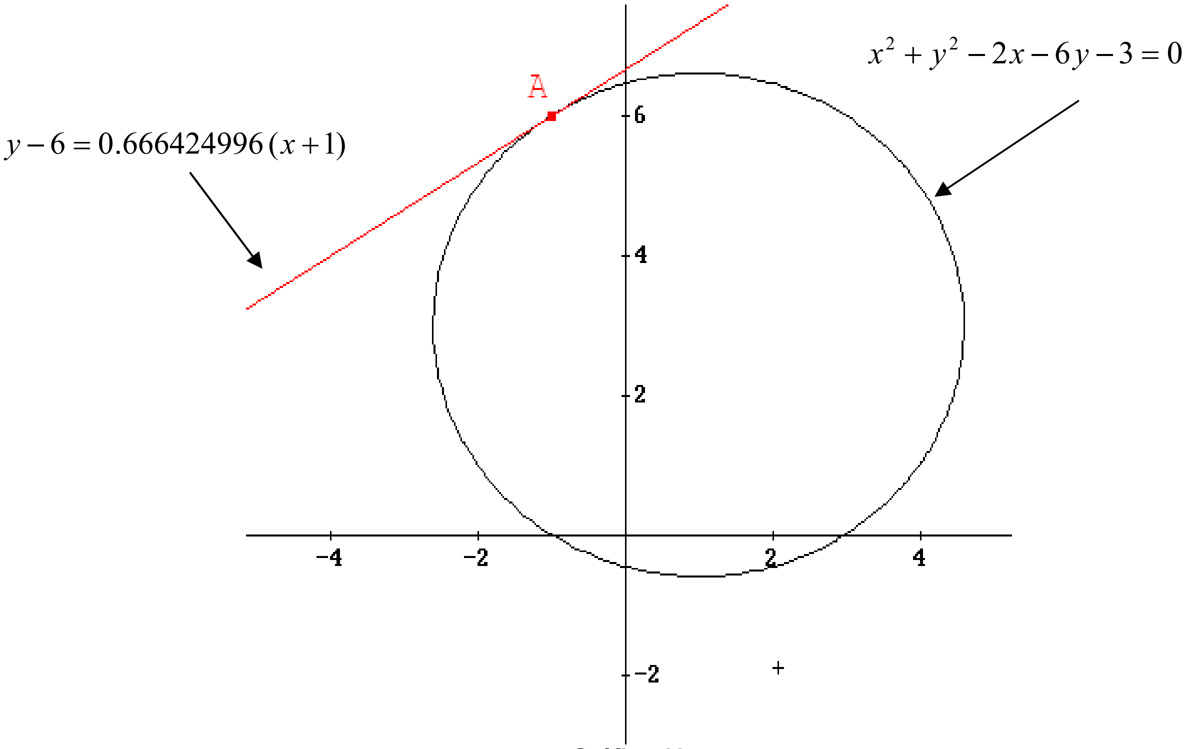



**Gráfica 16**
Fuente: **Elaboración propia**

Al usar la instrucción zoom, se aprecia mejor la recta tangente en el punto A.




**Gráfica 17**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 18**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comentarios

- Se pueden realizar más gráficas usando el software, además de la ventaja de la rapidez en los cálculos con lo que se puede aumentar el interés en el uso del software especializado en matemáticas.

**Caso 3** *Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola* $x^2 - 3x - 4y - \frac{7}{4} = 0$ *en el punto* $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$

**Fuente:** De Oteyza, E. et al. (2001). **Geometría Analítica y Trigonometría**. México: Prentice Hall Hispanoamericana. (p 464, prob. 9).

## Desarrollo

En este caso, el problema requiere encontrar la recta tangente a una parábola en un punto específico.
Usamos el material: organizadores avanzados, de acuerdo a la propuesta antes de resolver el problema y usar el software.

Los temas relacionados en este caso son:

- Evaluar una función, obteniendo puntos $(x, f(x))$
- Recta tangente y secante a una curva
- Pendiente de una recta
- Ecuación de la recta conociendo dos puntos
- Parábola, ejes paralelos a los ejes de coordenadas y vértice que no coincide con los ejes de coordenadas

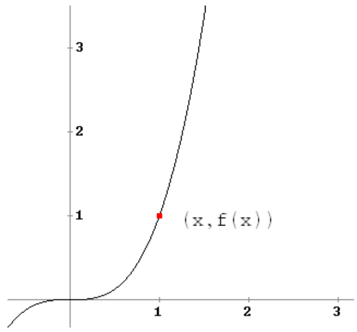
Definimos una recta secante en un punto cercano y vamos tomando valores cada vez más cercanos al punto de tangencia, hasta obtener un valor adecuado y definir la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Por último dibujamos la parábola y la recta tangente.

# Organizadores Avanzados

**Función**

Al evaluar una función, obtenemos puntos que tienen coordenadas del tipo $(x, f(x))$




**Recta**

**Tangente:** si toca a la curva en un punto

**Secante**: Toca a la curva en más de un punto

Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación conocidos dos puntos

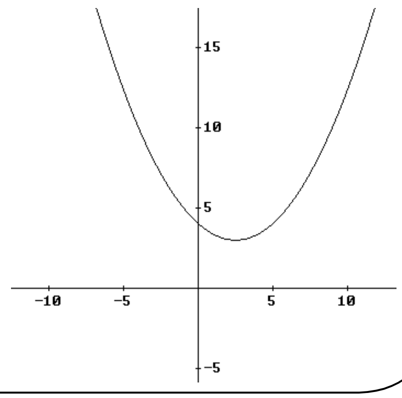
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**Parábola**

Ejes paralelos a los ejes de coordenadas y vértice que no coincide con los ejes de coordenadas

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$




$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

**Ilustración 3**
Fuente: **Elaboración propia**

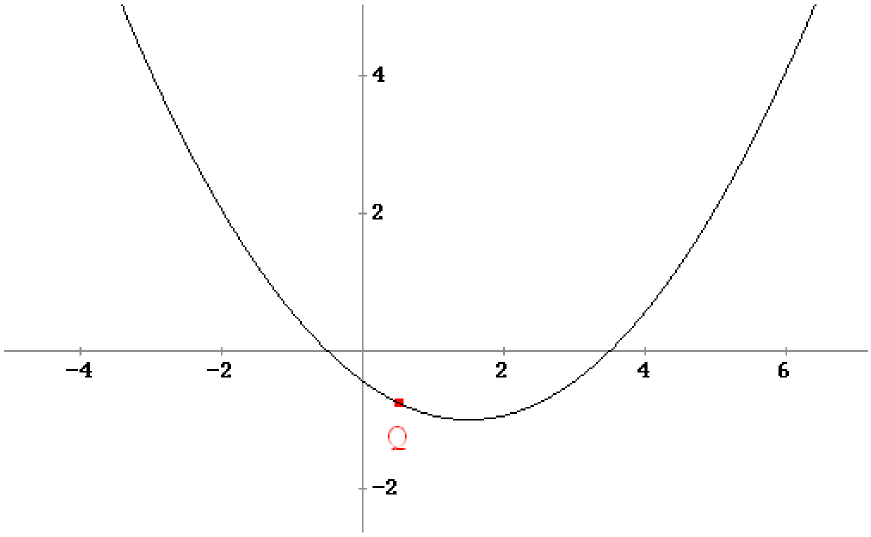
Usando el ***software Derive***

Parábola

#1: $x^2 - 3 \cdot x - 4 \cdot y - \dfrac{7}{4} = 0$

punto Q

#2: $\left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}\right]$




**Gráfica 19**
Fuente: **Elaboración propia**

Despejamos (y) de la expresión #1

#3: $\text{SOLVE}\left(x^2 - 3 \cdot x - 4 \cdot y - \dfrac{7}{4}, y\right)$

#4: $y = \dfrac{4 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 7}{16}$

Definimos un punto P cercano a Q

#5: $f(x) := y = \dfrac{4 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 7}{16}$

#6: $f(1)$

#7: $y = -\dfrac{15}{16}$

Coordenadas del punto P

#8: $\left[1, -\dfrac{15}{16}\right]$

Establecemos el valor de la pendiente de la recta secante

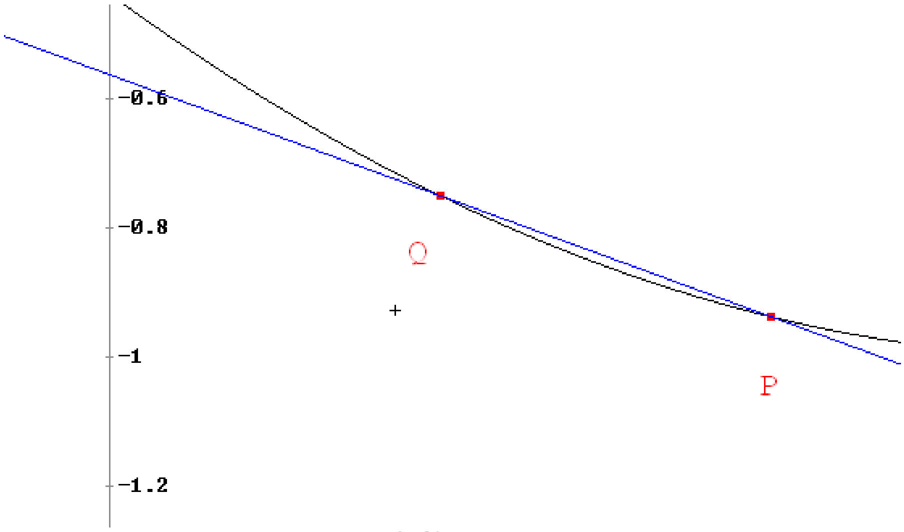
#9: $f(x1, y1, x2, y2) := \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#10: $f\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}, 1, -\dfrac{15}{16}\right)$

#11: $-\dfrac{3}{8}$

La ecuación de la recta secante que pasa por P y Q es

#12: $y + \dfrac{3}{4} = \left(-\dfrac{3}{8}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$




**Gráfica 20**
Fuente: **Elaboración propia**

En la expresión # 5, evaluamos puntos cada vez más cercanos a (1/2).

#13: $\text{TABLE}\left(y = \dfrac{4\cdot x^2 - 12\cdot x - 7}{16}, x, [0.51, 0.501, 0.5001]\right)$

#14: $\begin{bmatrix} 0.51 & y = -0.754975 \\ 0.501 & y = -0.75049975 \\ 0.5001 & y = -0.7500499975 \end{bmatrix}$

#15: $\text{TABLE}\left(y = \dfrac{4\cdot x^2 - 12\cdot x - 7}{16}, x, [0.4996, 0.4998, 0.4999]\right)$

#16: $\begin{bmatrix} 0.4996 & y = -0.7497999599 \\ 0.4998 & y = -0.7498999899 \\ 0.4999 & y = -0.7499499974 \end{bmatrix}$

Al acercarse al punto de tangencia, $f(x)$ se acerca cada vez más a – 0.75

#17: $-\dfrac{3}{4} - -0.7500499975$

El numerador de la pendiente en la expresión # 9 toma el valor de

#18: $4.999750012 \cdot 10^{-5}$

El denominador en esa misma expresión

#19: $\dfrac{1}{2} - 0.5001$

#20: $-0.0001$

#21: $f(x, y) := \dfrac{y}{x}$

#22: $f(-0.0001, 4.999750012 \cdot 10^{-5})$

#23: $-\dfrac{1249937503}{2500000000}$

#24: $-0.4999750011$

#25: $-\dfrac{3}{4} + 0.7499499974$

#26: $-5.000259999 \cdot 10^{-5}$

#27: $\dfrac{1}{2} - 0.4999$

#28: $\dfrac{1}{10000}$

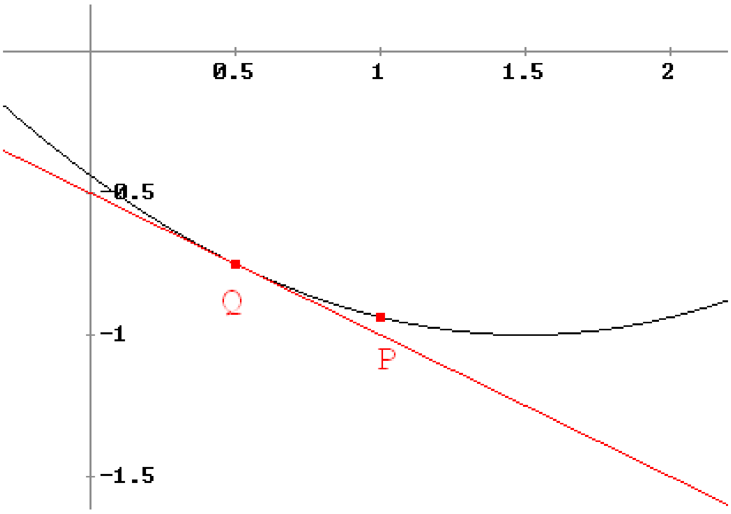
#29: $f\left(\dfrac{1}{10000}, -5.000259999 \cdot 10^{-5}\right)$

#30: $-\dfrac{5000259999}{10000000000}$

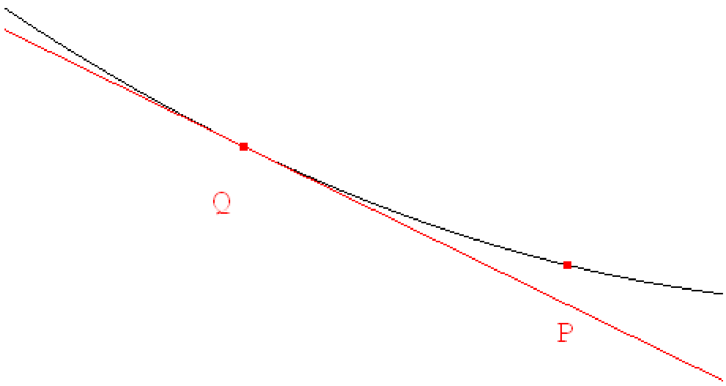
#31: $-0.5000259998$

Una buena aproximación de la pendiente de la recta tangente en el punto Q es −0.5, con este valor podemos encontrar y dibujar la recta tangente.

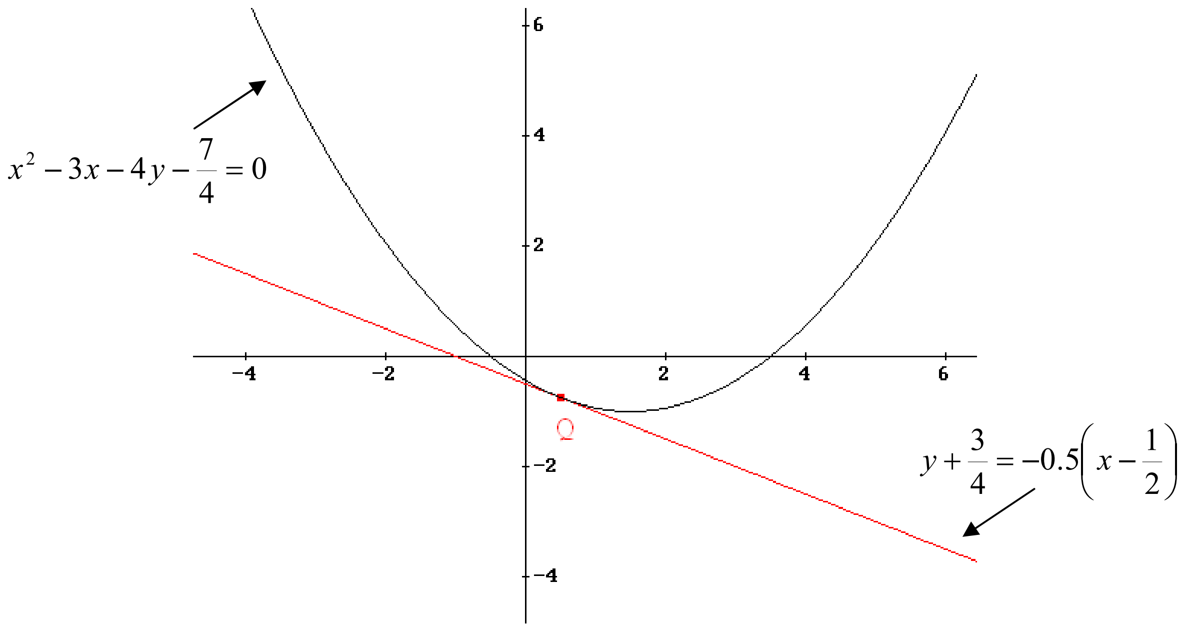
$$\#32: \quad y + \frac{3}{4} = -0.5 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$




**Gráfica 21**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 22**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 23**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comentarios

- El profesor puede definir un punto específico para encontrar la recta tangente o como en el caso número uno, dar las condiciones de que sea la intersección de otra recta o de otra curva, con lo que se puede elaborar un banco de problemas o enriquecer los ejercicios.

**Caso 4** *La gráfica de la ecuación* $x^2 - xy + y^2 = 9$ *es la elipse rotada mostrada en la figura (gráfica 24). Determina las rectas tangentes a esta curva en los dos puntos donde corta al eje de las x, y muestra que estas rectas son paralelas.*

**Fuente:** Edwards y Penney. 1996. **Cálculo con geometría analítica**. México: Prentice Hall Hispanoamericana. (p 170 prob. 27).

## Desarrollo

En este caso, el problema requiere encontrar la recta tangente a una elipse en los puntos donde la curva intersecta al eje $x$.
Usamos el material: organizadores avanzados, de acuerdo a la propuesta antes de resolver el problema y usar el software.

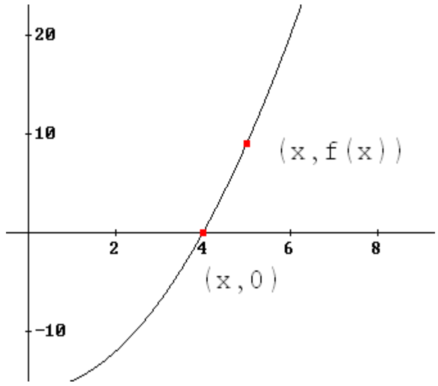
Los temas relacionados en este caso son:

- Evaluar una función, obteniendo puntos $(x, f(x))$
- Intersección de una función con el eje $x$
- Solución de ecuaciones
- Recta tangente y secante a una curva
- Pendiente de una recta
- Ecuación de la recta conociendo dos puntos
- Condición para rectas paralelas
- Elipse con centro en el origen
- Elipse con el elemento $xy$

Usando el software, despejamos $y$ para definir la función con la que se va a trabajar de acuerdo al problema, a su vez puede usarse para resolver las ecuaciones y encontrar los puntos de intersección con el eje $x$.
Definimos una recta secante en un punto cercano y vamos tomando valores cada vez más cercanos al punto de tangencia, hasta obtener un valor adecuado y definir la ecuación de la recta tangente en los puntos mencionados.
Por último dibujamos la elipse y las rectas tangentes.

## Organizadores Avanzados

**Función**
Al evaluar una función, obtenemos puntos que tienen coordenadas del tipo $(x, f(x))$; para encontrar el punto donde intersecta al eje $x$, en la expresión $y = f(x)$ hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación $f(x) = 0$




**Recta**

**Tangente**: si toca a la curva en un punto

**Secante:** Toca a la curva en más de un punto

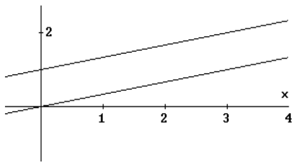
Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación conocidos dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

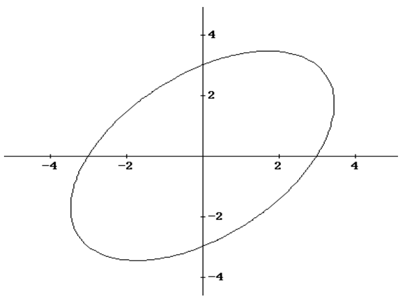
**Rectas paralelas:** Su pendiente tiene el mismo valor $m_1 = m_2$




**Elipse**

Con centro en el origen y el elemento $xy$

$$x^2 - xy + y^2 = 9$$




Con centro en el origen, eje focal coincide con el eje $x$

$$x^2 + 3y^2 = 9$$

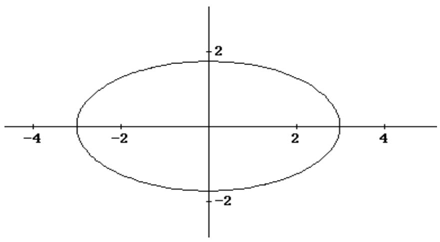
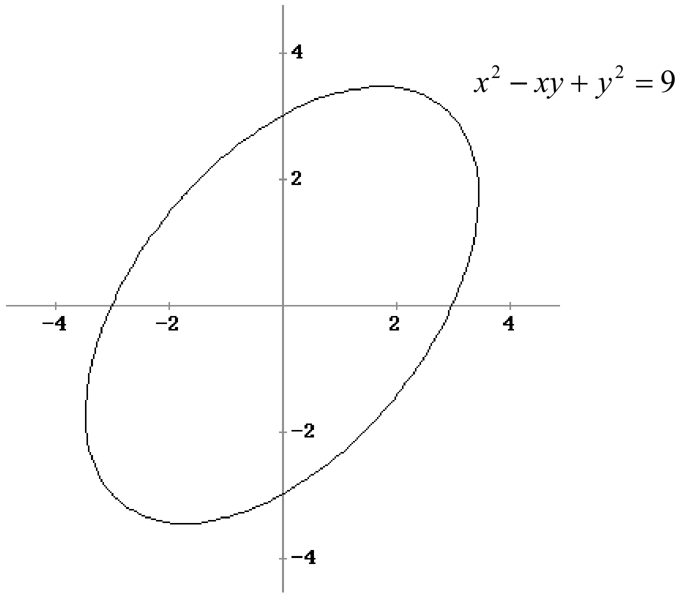



**Ilustración 4**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 24**
Fuente: **Elaboración propia**

Usando el ***software Derive***

Elipse

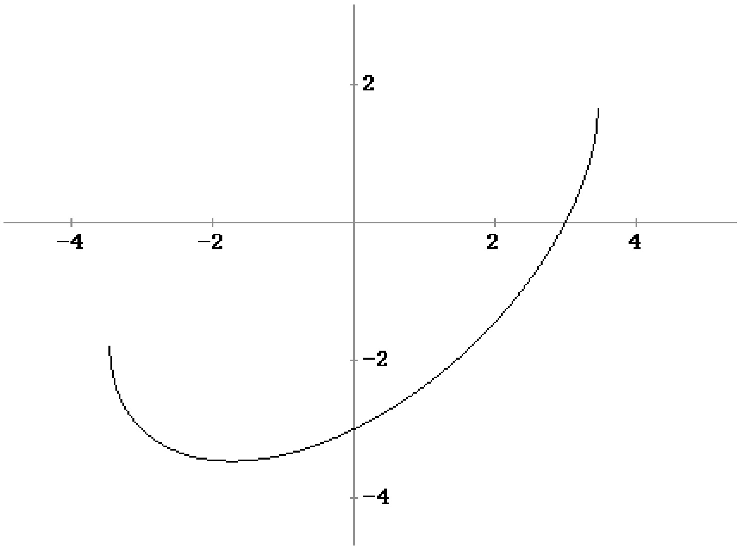
#1: $x^2 - x\cdot y + y^2 = 9$

Despejamos (y) de la expresión anterior

#2: $\text{SOLVE}(x^2 - x\cdot y + y^2 = 9,\ y)$

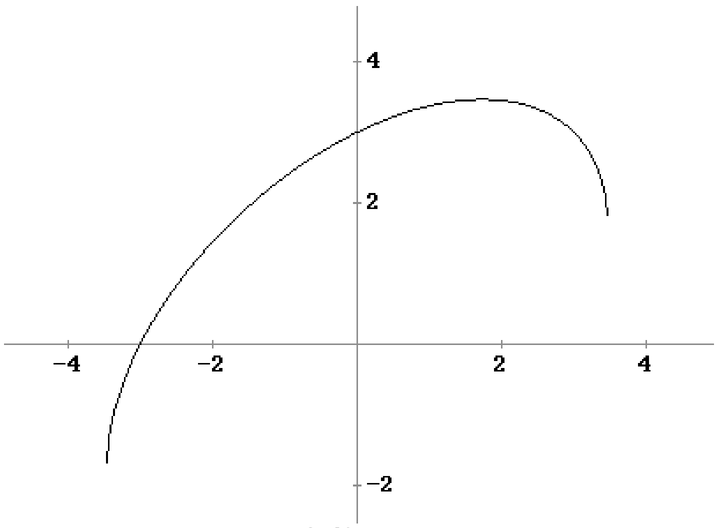
#3: $$y = \frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2} \vee y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2}$$

#4: $$y = \frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2}$$




**Gráfica 25**
Fuente: **Elaboración propia**

#5: $$y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2}$$




**Gráfica 26**
Fuente: **Elaboración propia**

En la expresión #4, encontramos la intersección con el eje x, haciendo( y = 0) y resolviendo la ecuación

#6: $$\frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2} = 0$$

#7: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2} = 0,\ x\right)$$

#8: $$x = 3$$

El punto A tiene coordenadas

#9: [3, 0]

De la expresión #4, evaluamos puntos cercanos al punto de tangencia

Usamos valores mayores y menores a 3, observamos el valor al cual se acerca $f(x)$

#10: $$\mathrm{TABLE}\left(y = \frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2},\ x,\ [3.1,\ 3.01,\ 3.001,\ 3.0001]\right)$$

#11: $$\begin{bmatrix} 3.1 & y = 0.2111572161 \\ 3.01 & y = 0.02010101353 \\ 3.001 & y = 0.002001001004 \\ 3.0001 & y = 0.0002000100006 \end{bmatrix}$$

Un valor aceptable de f(X) es 0.0002

#12: $$\mathrm{TABLE}\left(y = \frac{x - \sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)}}{2},\ x,\ [2.9,\ 2.99,\ 2.999,\ 2.9999]\right)$$

#13: $$\begin{bmatrix} 2.9 & y = -0.1908839081 \\ 2.99 & y = -0.01990098686 \\ 2.999 & y = -0.001999001000 \\ 2.9999 & y = -0.0001999900006 \end{bmatrix}$$

$f(x)$ Se acerca cada vez más a – 0.0002

Definimos una aproximación del valor de la pendiente de la recta tangente en el punto A tanto para valores mayores y menores a 3

#14: $f(x1,\ y1,\ x2,\ y2) := \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#15: $f(3,\ 0,\ 3.0001,\ 0.0002)$

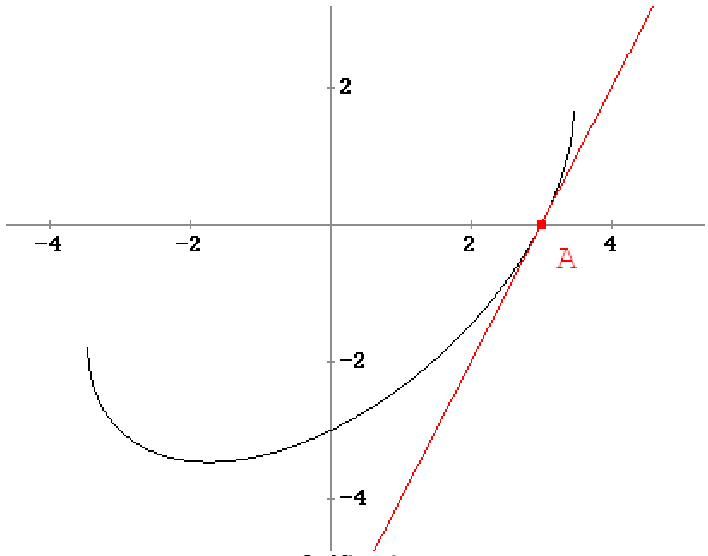
#16: $2$

#17: $f(3,\ 0,\ 2.9999,\ -0.0002)$

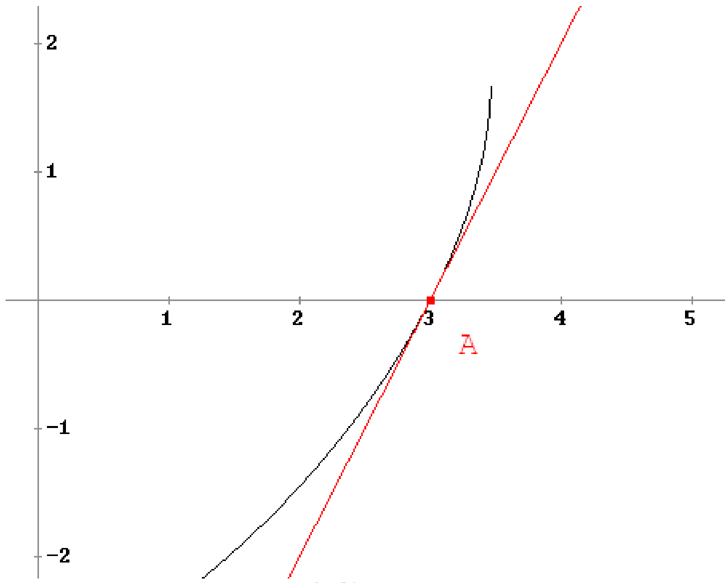
#18: $2$

La ecuación de la recta tangente en el punto A es:

#19: $y = 2\cdot(x - 3)$




**Gráfica 27**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 28**
Fuente: **Elaboración propia**

De la expresión #5 encontramos la intersección con el eje x

#20: $f(x) := y = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2}$

#21: $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2} = 0$

#22: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2} = 0,\ x\right)$

#23: $x = -3$

El punto B tiene coordenadas

#24: $[-3,\ 0]$

Evaluamos puntos cercanos al punto de tangencia con valores mayores y menores

#25: $\text{TABLE}\left(y = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2},\ x,\ [-3.1,\ -3.01,\ -3.001,\ -3.0001]\right)$

#26: $\begin{bmatrix} -3.1 & y = -0.2111572161 \\ -3.01 & y = -0.02010101353 \\ -3.001 & y = -0.002001001004 \\ -3.0001 & y = -0.0002000100006 \end{bmatrix}$

f(x) tiende a -0.0002

#27: $\text{TABLE}\left(y = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} + x}{2},\ x,\ [-2.9,\ -2.99,\ -2.999,\ -2.9999]\right)$

#28: $\begin{bmatrix} -2.9 & y = 0.1908839081 \\ -2.99 & y = 0.01990098686 \\ -2.999 & y = 0.001999001000 \\ -2.9999 & y = 0.0001999900006 \end{bmatrix}$

f(x) tiende a 0.0002

Definimos una aproximación a la tangente

$$\#29: \quad f(x1,\ y1,\ x2,\ y2) := \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Por la derecha

#30: f(-3, 0, -3.0001, -0.0002)

#31: 2

Por la izquierda

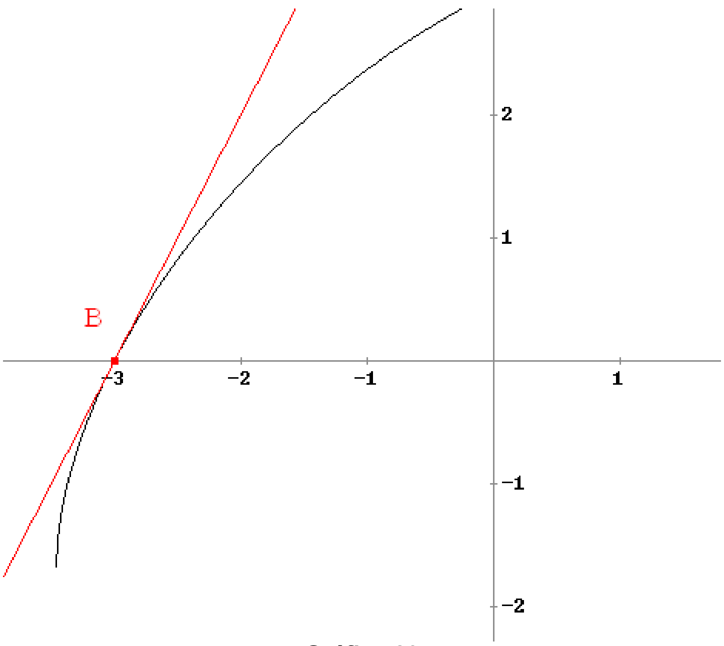
#32: f(-3, 0, -2.9999, 0.0002)

#33: 2

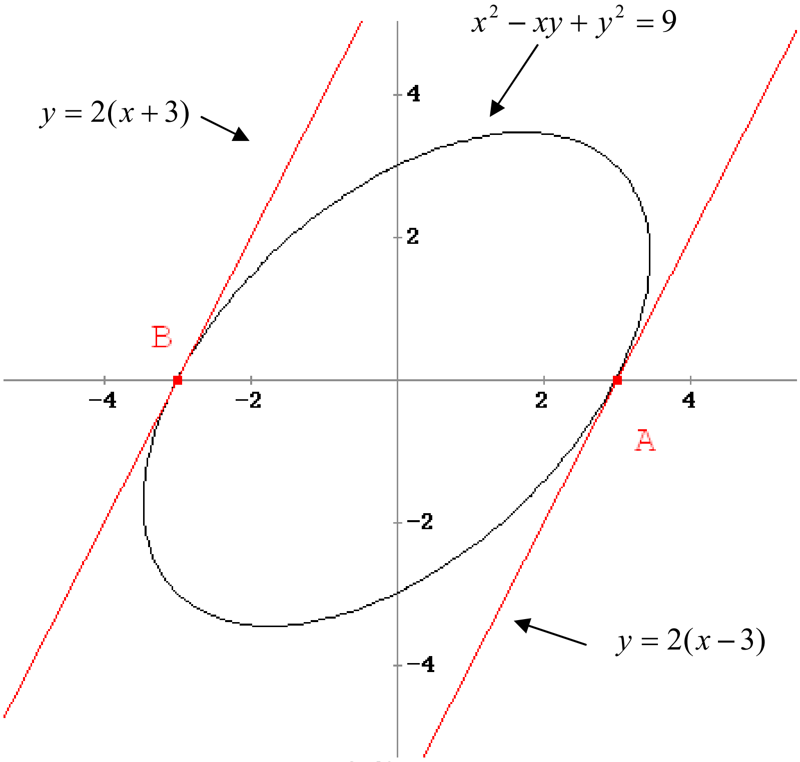
Lo anterior, define la pendiente de la recta tangente en B; como tiene el mismo valor que la pendiente de la recta tangente en el punto A, queda demostrado que las rectas son paralelas.

La ecuación de la tangente que pasa por B es

$$\#34: \quad y = 2 \cdot (x + 3)$$




**Gráfica 29**
Fuente: **Elaboración propia**

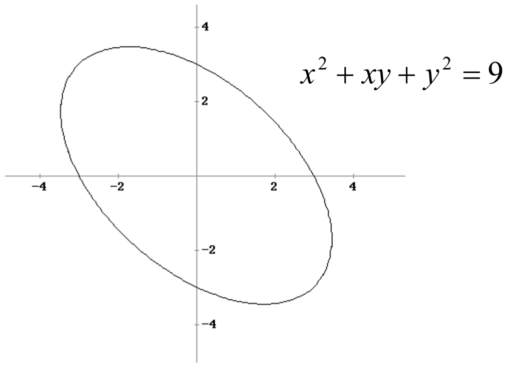



**Gráfica 30**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comentarios

- Al usar el software en la presentación de gráficas, es posible relacionar directamente los cálculos realizados con la curva presentada, como en el caso de resolver una ecuación y encontrar la intersección con alguno de los ejes.
- Es posible resolver problemas con otro grado de dificultad con la relación y aplicación de los temas vistos con anterioridad, y puede motivarse al alumno al poder aplicar los temas vistos anteriormente en la solución de un problema específico.

**Caso 5** *La expresión* $x^2 + xy + y^2 = 9$ *representa la elipse mostrada en la gráfica 31, determina el punto* $(x, f(x))$ *donde el valor sea el máximo y encuentra el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto.*




**Gráfica 31**
Fuente: **Elaboración propia**

## Desarrollo

En este caso, el problema requiere encontrar primeramente el punto donde el valor de la función es el máximo, usando tablas en este nivel, después, encontrar el valor de la recta tangente en ese punto.

Usamos el material: organizadores avanzados, de acuerdo a la propuesta antes de resolver el problema y usar el software.

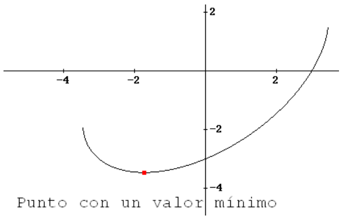
Los temas relacionados en este caso son:

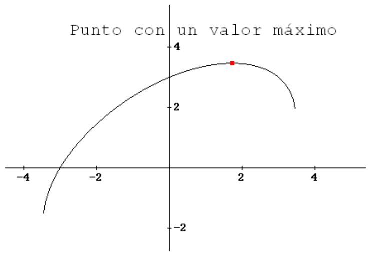
- Evaluar una función, obteniendo puntos $(x, f(x))$
- Tabulando, encontrar el valor $(x, f(x))$ que sea el máximo
- Recta tangente y secante a una curva
- Pendiente de una recta
- Ecuación de la recta conociendo dos puntos
- Elipse con centro en el origen
- Elipse con el elemento $xy$

Usando el software, despejamos $y$ para definir la función con la que se va a trabajar de acuerdo al problema que de acuerdo a la gráfica es la parte que contiene al punto de valor máximo. Definimos una recta secante en un punto cercano y vamos tomando valores cada vez más cercanos al punto de tangencia, hasta obtener un valor adecuado y definir la ecuación de la recta tangente en los puntos mencionados. Por último dibujamos la elipse y la recta tangente.

# Organizadores Avanzados

**Función:** En la expresión $y = f(x)$ si hacemos la tabulación de valores $(x, f(x))$, la función tendrá un punto en el que el valor sea el máximo (o mínimo) tratándose de las curvas que se ven en el curso de Geometría Analítica.




**Recta**

**Tangente**: si toca a la curva en un punto

**Secante:** Toca a la curva en más de un punto

Ecuación conocidos dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Pendiente

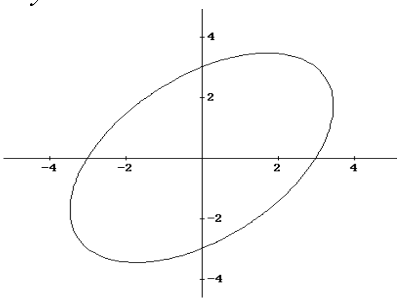
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Recta horizontal:** El valor de su pendiente es cero
$m = 0$

**Elipse**

Con centro en el origen y el elemento $xy$

$$x^2 - xy + y^2 = 9$$



Con centro en el origen, eje focal coincide con el eje $x$

$$x^2 + 3y^2 = 9$$

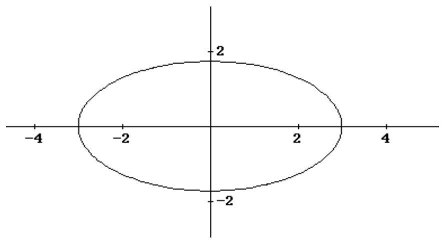


**Ilustración 5**
Fuente: **Elaboración propia**

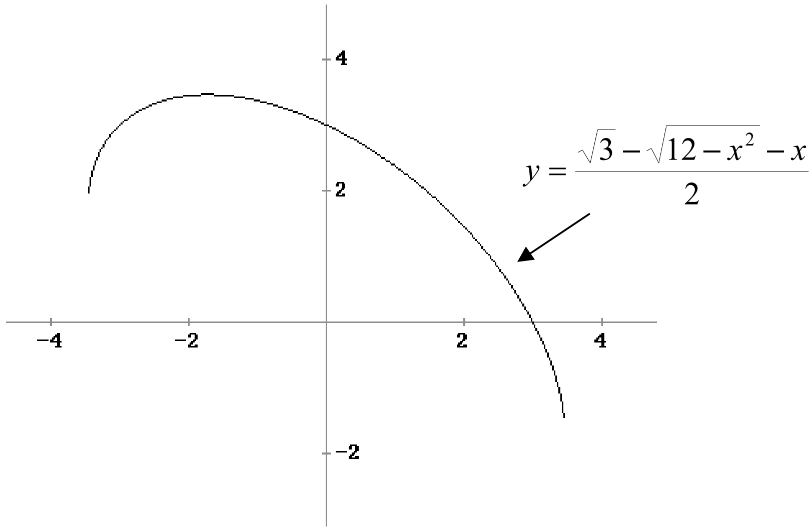
Usando el ***software Derive***

#1: $x^2 + x \cdot y + y^2 = 9$

Despejamos (y) de la expresión anterior y graficamos

#2: $\text{SOLVE}(x^2 + x \cdot y + y^2 = 9, y)$

#3: $$y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(12 - x^2)} - x}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(12 - x^2)} + x}{2}$$




**Gráfica 32**
Fuente: **Elaboración propia**

La gráfica anterior, presenta un punto donde el valor de $y$ es el máximo, podemos encontrar las coordenadas de ese punto y a su vez encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente. En este punto dentro del estudio de la geometría analítica y el tema de funciones el alumno tiene una idea intuitiva del punto máximo de una función, que puede comprobar de forma numérica en las tablas y visualizarlo en la gráfica, este concepto puede reforzarse en los cursos de cálculo en los semestres posteriores.

#4: $$y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} - x}{2}$$

Tomamos el rango de valores de −3 a −1 con intervalos de 0.5 considerando que en esta parte se encuentra el valor máximo.

#5: $$\text{TABLE}\left(y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} - x}{2}, x, -3, -1, 0.5\right)$$

#6:

| | |
|---|---|
| −3 | y = 3 |
| −2.5 | y = 3.326655965 |
| −2 | y = 3.449489742 |
| −1.5 | y = 3.454163456 |
| −1 | y = 3.372281323 |

Usamos valores de −2 a −1.5 con intervalos de 0.1

#7: $$\text{TABLE}\left(y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} - x}{2}, x, -2, -1.5, 0.1\right)$$

#8:

| | |
|---|---|
| −2 | y = 3.449489742 |
| −1.9 | y = 3.458485598 |
| −1.8 | y = 3.463201123 |
| −1.7 | y = 3.463905124 |
| −1.6 | y = 3.460826939 |
| −1.5 | y = 3.454163456 |

Valores de −1.8 a −1.7 con intervalos de 0.01

#9: $$\text{TABLE}\left(y = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} - x}{2}, x, -1.8, -1.7, 0.01\right)$$

#10:

| | |
|---|---|
| −1.8 | y = 3.463201123 |
| −1.79 | y = 3.463447974 |
| −1.78 | y = 3.463654988 |
| −1.77 | y = 3.463822405 |
| −1.76 | y = 3.463950463 |
| −1.75 | y = 3.464039397 |
| −1.74 | y = 3.464089435 |
| −1.73 | y = 3.464100806 |
| −1.72 | y = 3.464073731 |
| −1.71 | y = 3.464008432 |
| −1.7 | y = 3.463905124 |

Cuando x = −1.73, (y) toma el valor máximo de 3.46400806

¿Cuál es el valor de la pendiente en ese punto?

```
Tomamos el valor más cercano y calculamos la pendiente de la recta
#11:  [-1.74, 3.464089435]
#12:  [-1.73, 3.464100806]
La pendiente entre estos dos puntos es:
```

#13: $f(x1,\ y1,\ x2,\ y2) := \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#14: f(-1.74, 3.464089435, -1.73, 3.464100806)

#15: $\dfrac{11371}{10000000}$

#16: 0.0011371

Si usamos un rango más pequeño, nos acercamos más al punto máximo, entonces: ¿El valor de la pendiente se acercará más a cero?

Usamos el rango de -1.73 a -1.74 cada 0.001

#17:

| | |
|---|---|
| -1.74 | y = 3.464089435 |
| -1.739 | y = 3.464092309 |
| -1.738 | y = 3.464094795 |
| -1.737 | y = 3.464096896 |
| -1.736 | y = 3.464098611 |
| -1.735 | y = 3.46409994 |
| -1.734 | y = 3.464100883 |
| -1.733 | y = 3.464101441 |
| -1.732 | y = 3.464101614 |
| -1.731 | y = 3.464101402 |
| -1.73 | y = 3.464100806 |

#18: $\mathrm{TABLE}\left(y = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(12 - x^2)} - x}{2},\ x,\ -1.733,\ -1.732,\ 0.0001\right)$

#19:

| | |
|---|---|
| -1.733 | y = 3.464101441 |
| -1.7329 | y = 3.464101476 |
| -1.7328 | y = 3.464101507 |
| -1.7327 | y = 3.464101534 |
| -1.7326 | y = 3.464101557 |
| -1.7325 | y = 3.464101576 |
| -1.7324 | y = 3.464101591 |
| -1.7323 | y = 3.464101603 |
| -1.7322 | y = 3.46410161 |
| -1.7321 | y = 3.464101614 |
| -1.732 | y = 3.464101614 |

#20: $f(x1, y1, x2, y2) := \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#21: f(-1.7321, 3.464101614, -1.732, 3.464101614)

#22: 0

Cuando el valor de la función es máximo, el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto es cero.

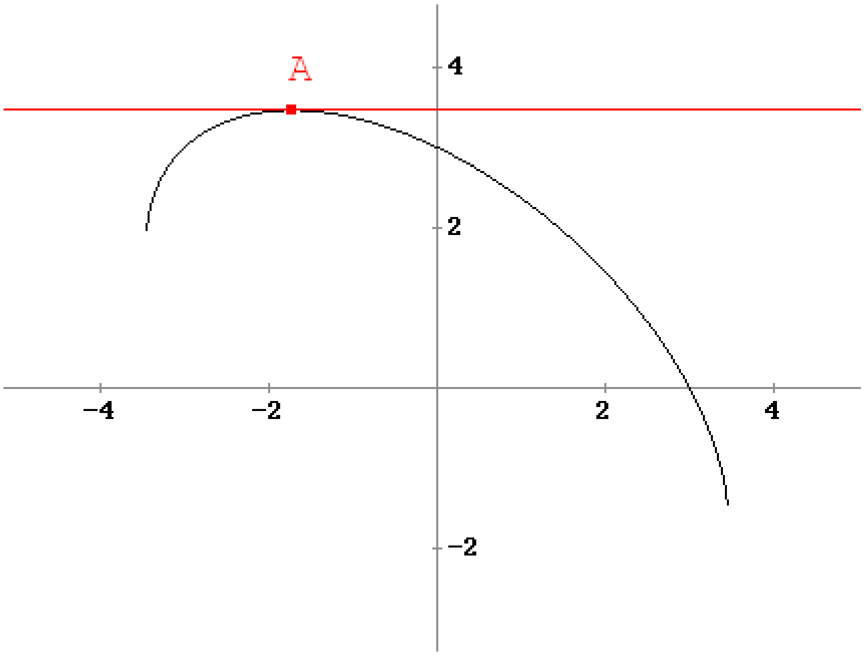
La función, tiene un punto máximo en las coordenadas:

#23: [-1.7321, 3.464101614]

La ecuación de la recta tangente en ese punto es:

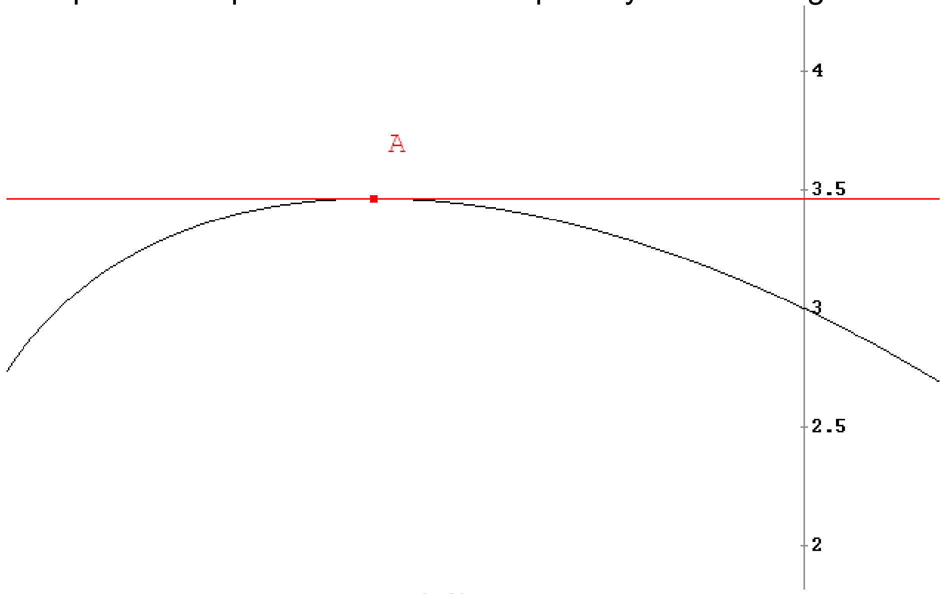
#24: y = 3.464101614

Veamos la gráfica con los elementos que encontramos:

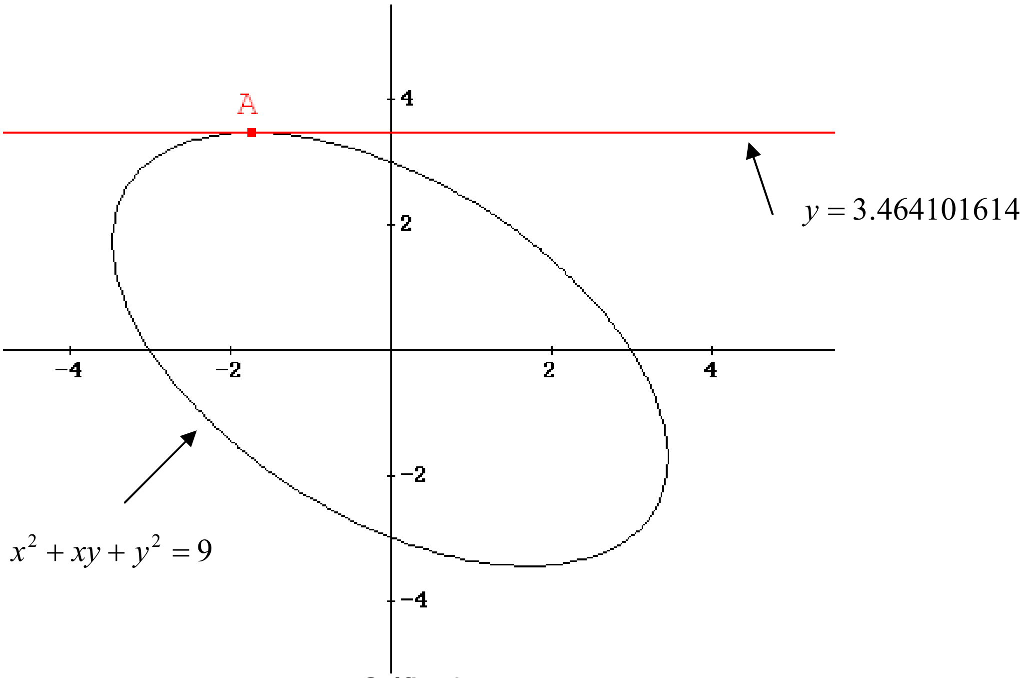



**Gráfica 33**
Fuente: **Elaboración propia**

Usando zoom podemos apreciar con detalle el punto y la recta tangente




**Gráfica 34**
Fuente: **Elaboración propia**




**Gráfica 35**
Fuente: **Elaboración propia**

## Comentarios

- Usando tablas y con la ayuda del software podemos localizar puntos en la curva que tengan valor máximo (o mínimo) y encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto, además se refuerza con las gráficas; estos temas pueden servir de base para el estudio del tema máximo y mínimos en los cursos posteriores de cálculo.

## Resultados

- Al poder elaborar gráficas usando el software, se refuerza este aspecto de la enseñanza de la asignatura.
- Se pueden realizar más y mejores gráficas usando el software, además de la ventaja de la rapidez en los cálculos con lo que se puede aumentar el interés en el uso del software especializado en matemáticas.
- El software contribuye a que los estudiantes acepten que la geometría y las matemáticas en general no es un producto terminado, sino que es posible que ellos mismos desarrollen o descubran nuevas ideas o estrategias de solución.
- Al encontrar una aplicación a los temas vistos con anterioridad se puede incrementar el interés en la materia y se puede contribuir a disminuir los índices de reprobación con la elaboración de un material adecuado a la aplicación del software.
- Usando tablas y con la ayuda del software podemos localizar puntos en la curva y encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto, además se refuerza con las gráficas; estos temas pueden servir de base para el estudio de los cursos posteriores de cálculo.
- Usando problemas específicos, se complementa el aspecto visual en la solución de problemas al tener la facilidad de realizar la gráfica al momento de llevar a cabo los procedimientos algebraicos, con lo que el alumno y el maestro pueden comprobar si se sigue una estrategia de solución adecuada.
- Es posible resolver problemas con otro grado de dificultad con la relación y aplicación de los temas vistos con anterioridad, y puede motivarse al alumno al poder aplicar los temas vistos anteriormente en la solución de un problema específico.
- El alumno no solamente es un espectador, pasa a ser un alumno activo vinculado con el desarrollo de la materia.
- Como vimos, es posible encontrarse la tangente a una curva usando solamente el software con algunas herramientas de cálculo diferencial, la desventaja de hacerlo de esta manera en este grado, es que los alumnos carecen de los conocimientos previos adecuados para usar el software de una forma adecuada.

## Conclusiones y recomendaciones

- El maestro puede mejorar el ambiente de aprendizaje dentro del aula usando recursos tecnológicos. Es innegable que debe primero él estar convencido de que se puede aprender matemáticas apoyándose en la tecnología, además preparase en forma continua, debe diseñar con cuidado las actividades, desde ejercicios en clase hasta los diferentes tipos de problemas que presentará al alumno para ubicarlos dentro de su contexto sociocultural.
- Una gran parte de nuestros alumnos están familiarizados con la tecnología, viven dentro de la cultura de la información, el reto del maestro es que sus salones de clase sigan siendo una extensión del entorno social del alumno, que vean el uso de tecnología dentro del salón de clases de la forma natural en la que ellos la ven a diario, debemos darle un uso adecuado, en lugar de no usarla pretextando que en lugar de ayudar impide ver al alumno los conceptos matemáticos.
- Los docentes deben comprender que el uso de la tecnología es un medio para lograr el aprendizaje y no considerar que usar tecnología necesariamente significa el introducir computadoras a los salones de clases, más bien generar en nuestros alumnos interés por la materia, diseñando actividades que los involucren con su medio. De esta forma generamos una forma diferente de aprender matemáticas que como tal debe evaluarse tomando en cuenta el grado de aprendizaje de las habilidades de razonamiento matemático de los problemas y no solamente mediante un examen que no necesariamente refleja los conocimientos adquiridos por los alumnos.
- El uso de tecnología no necesariamente facilita las cosas al profesor y al alumno en un principio, lo que puede provocar desanimo o desinterés.
- La propuesta no se enfoca al uso exclusivo del software sino que se considera un refuerzo de lo aprendido algebraicamente en clase. Ya que se trabaja con conceptos que el alumno ya conoce.
- La función de la computadora no es el de proporcionar rápidamente toda la información al estudiante sino que es un recurso para analizar detalladamente el comportamiento de las rectas y los puntos de tangencia.
- El maestro debe planear muy bien los problemas y actividades de aprendizaje dentro del aula, considerando aspectos tanto algebraicos como gráficos.

# Bibliografía

Cantoral, R. et al (2003). **Desarrollo del pensamiento matemático**. México: Editorial Trillas.

Carrillo De Albornoz, T. & Llamas, I. (1994) **Derive: aplicaciones matemáticas para PC** México: Addison- Wesley Iberoamericana.

Charles H. Lehmann (1969) **Geometría Analítica**. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. (2001) **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas I, II, II, IV, V y VI**. México: Dirección Académica.

Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. (2006). **Estadística básica 2005 – 2006**, México: Dirección de planeación y desarrollo.

Colegio de Bachilleres del Estado de Michoacán. (2006). **Estadística básica 2006 – 2007**, México: Dirección de planeación y desarrollo.

De Oteyza, E. et al. (1994). **Geometría Analítica**. (pp. 137-277). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

De Oteyza, E. et al. (2001). **Geometría Analítica y Trigonometría**. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Edwards y Penney. (1996). **Cálculo con geometría analítica**. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Escamilla de los Santos, J. G. (2002) **Selección y uso de tecnología educativa**. México: Trillas.

Peña C. & Salazar M. (2004) Tercera academia estatal de docentes: **factores que inciden en la reprobación escolar**. México: COBAEM.

Pozo Municio I. (2000) **Aprendices y Maestros** (1ª Reimpresión 2000). Madrid: Alianza Editorial.

Santos Trigo L. (1997) **Principios y Métodos de la Solución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas** (2da. Ed.) México, Grupo Editorial Ibero América.

Secretaria de Educación Pública (S. E. P.) (s/f) **Programa de estudio de las asignaturas de matemáticas III y IV**. México: Dirección General Del Bachillerato.

Villaseñor, S. (1998). **La tecnología en el proceso de enseñanza – aprendizaje**. México: Trillas.

## Referencias electrónicas

Saenz, L. (2007) **Tangente a una cónica**. Consultado en:
Http://lsaenz96.googlepages.com/ETconicas2.pdf
El 21 de septiembre de 2007.